



TESIS - SM 142501

**ANALISA ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI PAKSA
FLUIDA KENTAL MAGNETOHIDRODINAMIK (MHD)
MELEWATISILINDER ELIPTIK**

DWI ARIYANI KHALIMAH
NRP 1214 201 037

Dosen Pembimbing:
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Dr. Chairul Imron, M.I. Komp

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SM 142501

**ANALYSIS OF UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD)
FORCED CONVECTIVE VISCOUS FLUIDFLOW PAST AN
ELLIPTIC CYLINDER**

DWI ARIYANI KHALIMAH
NRP 1214 201 037

Supervisor:
Prof. Dr. BasukiWidodo, M.Sc
Dr. ChairulImron, M.I.Komp

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

ANALISA ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI PAKSA FLUIDA KENTAL
MAGNETOHIDRODINAMIK (MHD) MELEWATI SILINDER ELIPTIK

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat mendapatkan gelar
Magister Sains (M. Si.)

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh

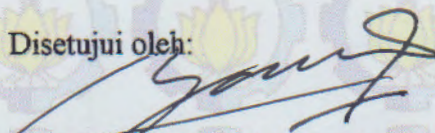
DWI ARIYANI KHALIMAH

NRP 1214 201 037

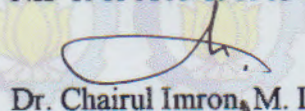
Tanggal Ujian
Periode Wisuda

: 8 Januari 2016
: Maret 2016

Disetujui oleh:


Prof. Dr. Basuki Widodo, M. Sc.
NIP 19650605 198903 1 002

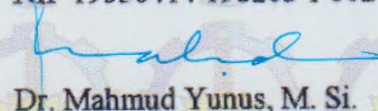
(Pembimbing I)


Dr. Chairul Imron, M. I. Komp.
NIP 19611115 198703 1 003

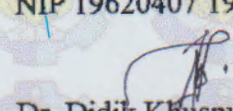
(Pembimbing II)


Dr. Drs. Hariyanto, M. Si.
NIP 19530414 198203 1 002

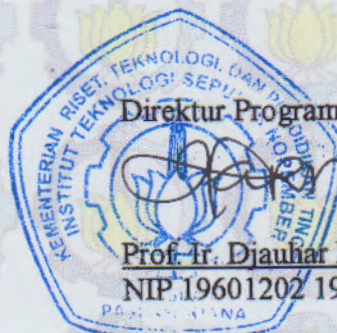
(Penguji)


Dr. Mahmud Yunus, M. Si.
NIP 19620407 198703 1 005

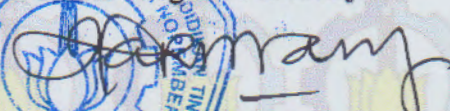
(Penguji)


Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M. Si.
NIP 19730930 199702 1 001

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana

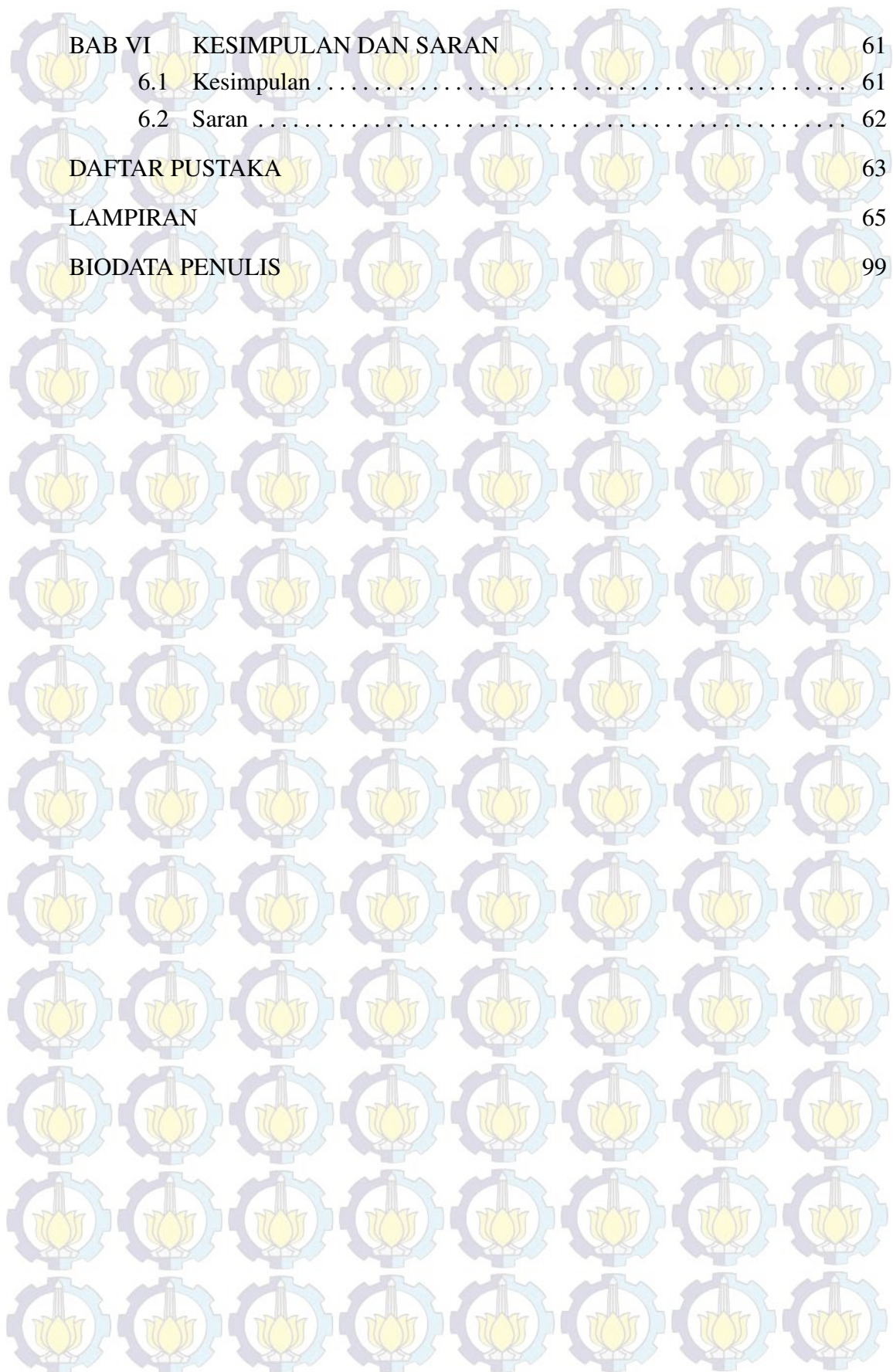

Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M. Sc., Ph.D.
NIP.19601202 198701 1 001

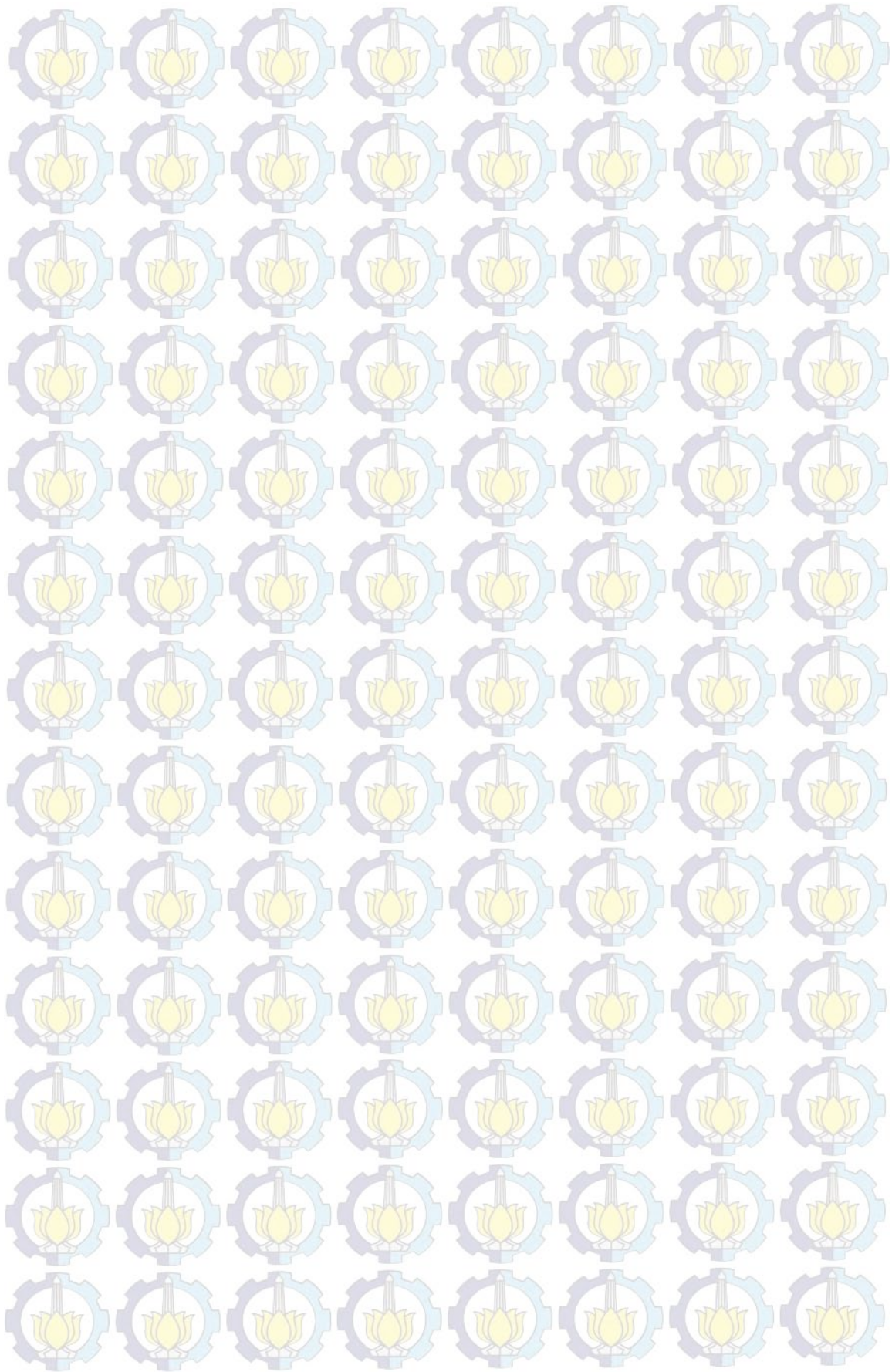
DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Kontribusi Hasil Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida	7
2.2.1 Viskositas	7
2.2.2 Fluida <i>Newtonian</i>	8
2.2.3 Fluida <i>Non-Newtonian</i>	8
2.3 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu	9
2.4 Perpindahan Panas Konveksi	9
2.4.1 Konveksi Bebas (<i>Free Convection Flow</i>)	10
2.4.2 Konveksi Paksa (<i>Forced Convection Flow</i>)	10
2.4.3 Konveksi Aliran Campuran (<i>Mixed Convection Flow</i>)	10
2.5 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	10

2.5.1	Aliran Laminer	11
2.5.2	Aliran Transisi	11
2.5.3	Aliran Turbulen	11
2.6	Magnetohidrodinamik (MHD)	12
2.7	Metode Beda Hingga (<i>Finite Difference Method</i>)	14
2.7.1	Skema Keller-Box	14
BAB III	METODA PENELITIAN	17
3.1	Tahapan Penelitian	17
3.1.1	Tahap Analisa Awal	18
3.2	Tahapan Implementasi	18
3.2.1	Tahap Analisis Akhir	19
3.3	Tempat Penelitian	19
BAB IV	MODEL MATEMATIKA	21
4.1	Persamaan Pembangun Model Matematika	22
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	22
4.1.2	Persamaan Momentum	25
4.1.3	Persamaan Energi	29
4.2	Penurunan Persamaan Pembangun Model	32
4.2.1	Persamaan Momentum	33
4.2.2	Transformasi Variabel Takberdimensi	35
4.2.3	Pendekatan Lapisan Batas	36
4.2.4	Fungsi Arus atau Fungsi Alir (<i>Stream Function</i>)	37
4.2.5	Persamaan Similaritas	38
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	43
5.1	Penyelesaian Numerik Model	43
5.1.1	Diskritisasi Model	43
5.1.2	Linierisasi Model	45
5.1.3	Teknik Eliminasi Blok	47
5.2	Hasil Simulasi Numerik	52
5.2.1	Pengaruh Parameter Magnetik	53
5.2.2	Pengaruh Bilangan Prandtl	54
5.2.3	Pengaruh Variasi Parameter Konveksi	56
5.2.4	Pengaruh Variasi Sumbu Vertikal dan Horisontal Silinder Elliptik	57

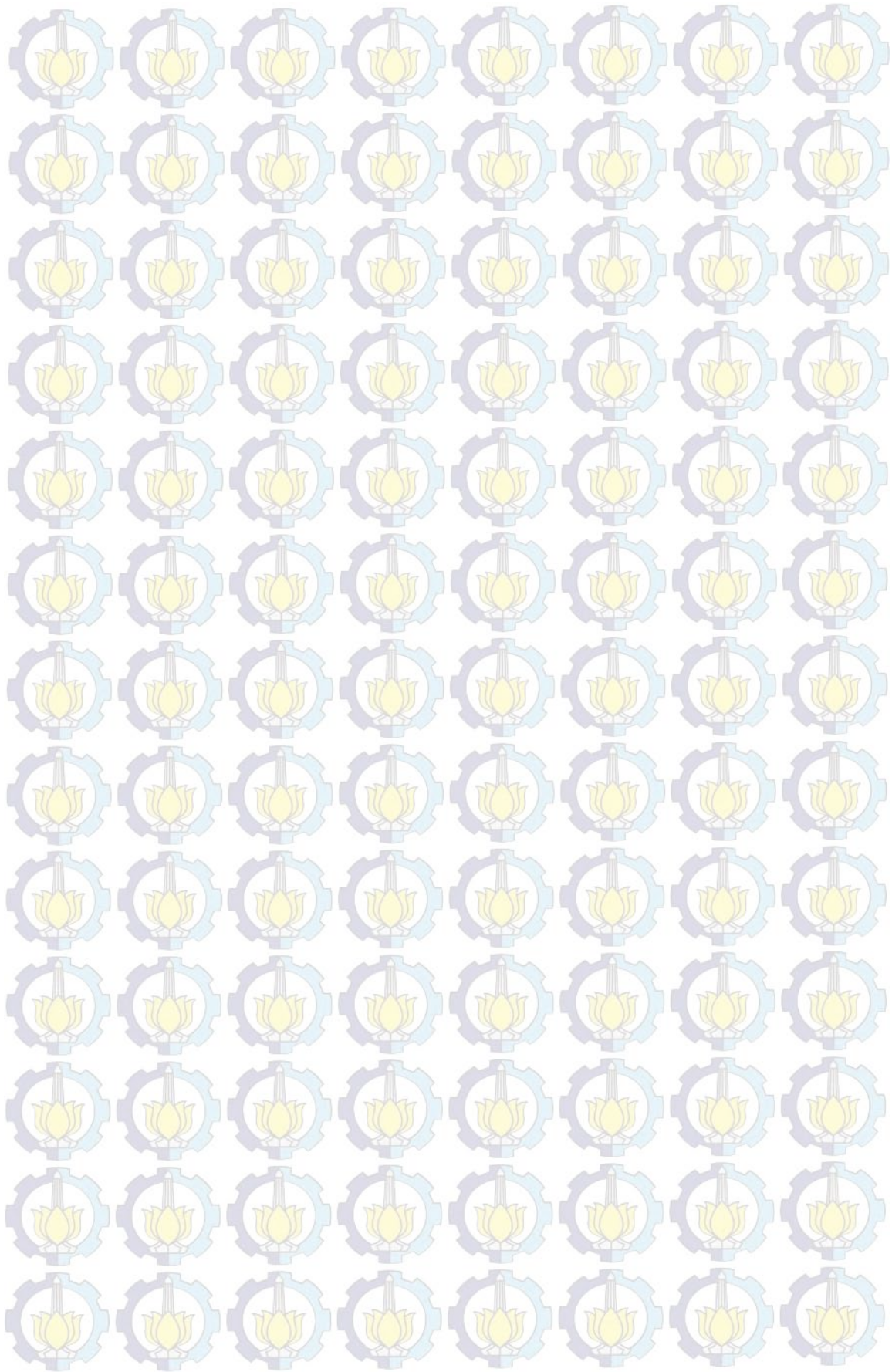
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	61
6.1	Kesimpulan	61
6.2	Saran	62
	DAFTAR PUSTAKA	63
	LAMPIRAN	65
	BIODATA PENULIS	99





DAFTAR TABEL

Tabel 6.1	Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Magnetik	92
Tabel 6.2	Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Magnetik	92
Tabel 6.3	Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Parameter Magnetik	93
Tabel 6.4	Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Bilangan Prandtl	94
Tabel 6.5	Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Bilangan Prandtl	94
Tabel 6.6	Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Bilangan Prandtl	95
Tabel 6.7	Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Konveksi (α)	95
Tabel 6.8	Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Konveksi (α)	96
Tabel 6.9	Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Parameter Konveksi (α)	96
Tabel 6.10	Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)	96
Tabel 6.11	Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)	97
Tabel 6.12	Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)	97
Tabel 6.13	Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)	98
Tabel 6.14	Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)	98
Tabel 6.15	Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)	98



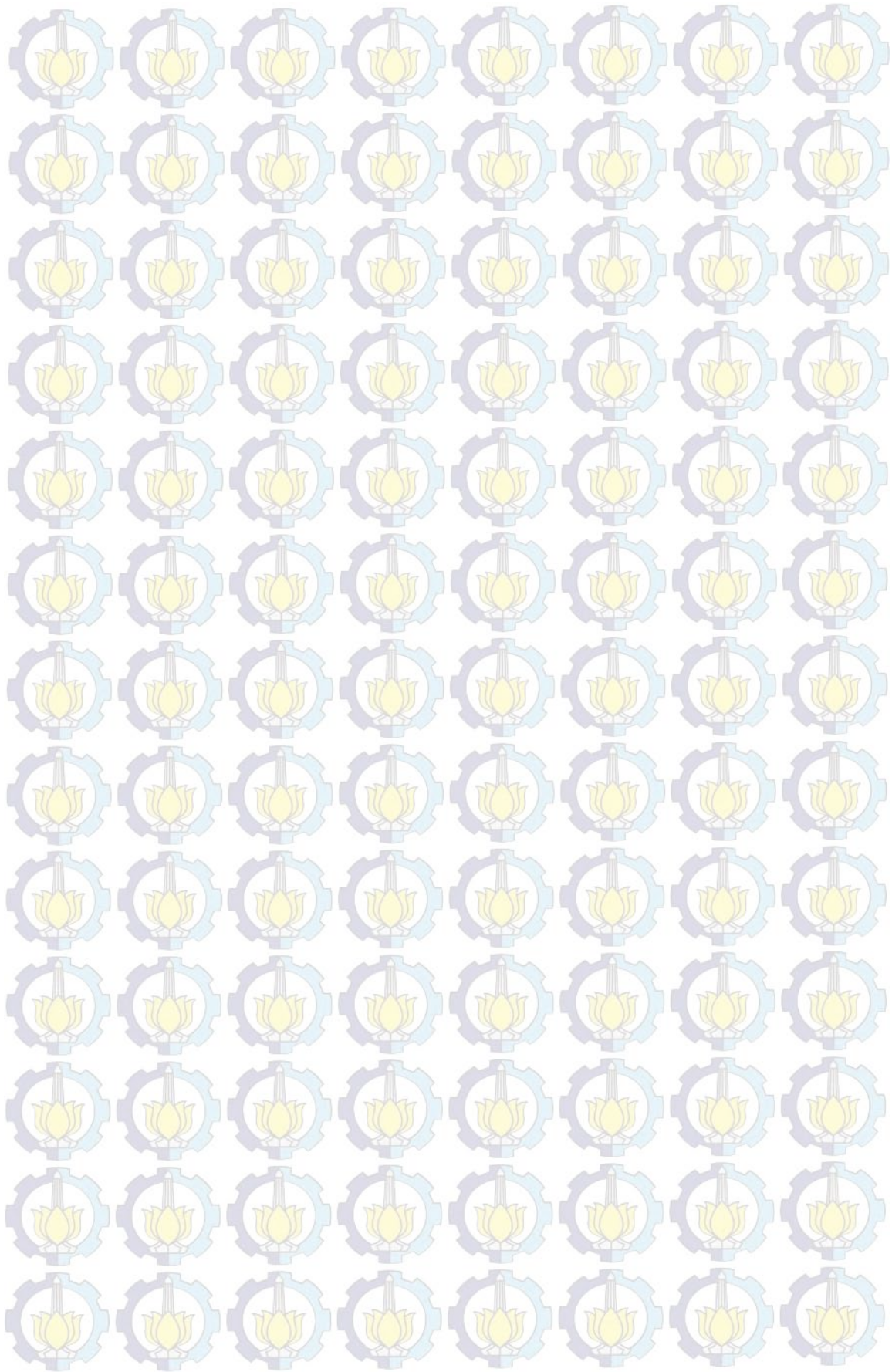
DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Lapisan Batas yang Terbentuk Pada saat Fluida Melewati Sebuah Silinder Eliptik	2
Gambar 2.1	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik pengamatan Sulistyaningtyas (2015)	6
Gambar 2.2	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik <i>bluff body</i>	7
Gambar 2.3	Klasifikasi Fluida	9
Gambar 2.4	Lapisan Batas di Sekitar <i>Airfoil</i>	12
Gambar 2.5	Stensil Skema Keller-Box	15
Gambar 3.1	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik <i>bluff body</i>	17
Gambar 4.1	Bentuk 3-Dimensi (kiri) dan Sistem Koordinat Silinder Eliptik 2-Dimensi (kanan)	21
Gambar 4.2	Volume Atur	23
Gambar 4.3	Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur	23
Gambar 4.4	Gaya-gaya Permukaan dalam Arah x yang Bekerja pada Elemen Fluida	26
Gambar 5.1	Stensil Beda Hingga	44
Gambar 5.2	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik (M) ..	53
Gambar 5.3	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik (M) ..	53
Gambar 5.4	Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)	55
Gambar 5.5	Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)	55
Gambar 5.6	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi (α) ..	56
Gambar 5.7	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi (α) ..	56
Gambar 5.8	Profil Kecepatan dengan Variasi Nilai Sumbu Horizontal (b) ..	57
Gambar 5.9	Profil Temperatur dengan Variasi Nilai Sumbu Horizontal (b)	58
Gambar 5.10	Profil Kecepatan dengan Variasi Nilai Sumbu Vertikal (a) ..	59
Gambar 5.11	Profil Temperatur dengan Variasi Nilai Sumbu Vertikal (a) ..	59

Gambar 6.1	(a.) Profil Kecepatan dengan Variasi M dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi M	92
Gambar 6.2	(a.) Profil Kecepatan dengan Variasi Pr dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi Pr	93
Gambar 6.3	(a.) Profil Kecepatan dengan Variasi α dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi α	94
Gambar 6.4	(a.) Profil Kecepatan dengan Variasi b dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi b	95
Gambar 6.5	(a.) Profil Kecepatan dengan Variasi a dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi a	97

DAFTAR SIMBOL

ρ	Densitas fluida
μ_0	Viskositas dinamik
\mathbf{u}	Komponen kecepatan fluida, dengan $\mathbf{u} = (u, v, 0)$
u	Komponen kecepatan pada sumbu- x
v	Komponen kecepatan pada sumbu- y
g	Gravitasi
a	Jari-jari silinder
\hat{n}	Vektor normal terhadap elemen dA
τ	Tegangan geser
\mathbf{F}	Gaya pada benda
\mathbf{F}_s	Gaya permukaan
\mathbf{J}	Kerapatan arus
\mathbf{B}	Gaya magnet
\mathbf{B}_0	Medan magnet
b	Induksi medan magnet
E	Medan listrik
σ	Konduktivitas listrik
P	Tekanan
P_h	Tekanan hidrostatik
P_d	Tekanan dinamis
I	Matriks identitas
M	Parameter magnetik
α	Parameter konveksi
Pr	Bilangan Prandtl
Re	Bilangan Reynolds
Gr	Bilangan Grashof
T	Temperatur
U_∞	Kecepatan aliran bebas
t	Waktu
\forall	Volume fluida
ν	Viskositas kinematik
ψ	Fungsi aliran



KATA PENGANTAR

Dengan Rahmat Allah SWT, syukur Alhamdulillah penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul:

”Analisa Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) Melewati Silinder Eliptik”

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Terselesaikannya Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, Bapak Samsul Arifin dan Ibu Sri Kayatin, yang telah memberikan motivasi lahir dan batin sampai terselesaikannya Tesis ini.
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.Es., Ph.D., selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang mendukung kepada penulis untuk menyelesaikan Tesis ini.
3. Direktorat Jendral Perguruan Tinggi (DIKTI) selaku penyandang dana yang telah memberikan beasiswa *Fresh Graduate*
4. Bapak Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D., selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
5. Bapak Dr. Imam Muchlas, S.Si, M.T., selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
6. Bapak Dr. Subiono, M.S., selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS.
7. Bapak Prof. DR. Mohammad Isa Irawan, MT. selaku dosen wali.
8. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc., dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.

9. Bapak Dr. Drs. Hariyanto, M.Si, Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., dan Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
10. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis dan juga atas segala bantuan, kemudahan, dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
11. Saudara kandung, Eko Arifianto dan Nurhayati Sholichah, yang telah memberikan dukungan moral selama penulis menempuh pendidikan sampai mendapat gelar Magister.
12. Teman-teman Tim CFD, Indira Anggriani, Firdha Dwishafarina, Annisa Dwi Sulistyaningtyas, Galuh Oktavia Siswono, Mohammad Ghani, Wayan Rumite, Putri Pradika Wanti, dan Mohamad Tafrikan, atas dukungan yang diberikan kepada penulis selama penelitian sampai terselesaikannya Tesis ini.
13. Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2014 khususnya Ngatini, Irma Fitria, Nurlita Wulansari, dan Cynthia Alvionita yang telah menemani, memotivasi, dan memberikan segala bantuannya selama ini.
14. Teman-teman S1 Matematika ITS angkatan 2009 yang telah memberikan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan pendidikan magister.
15. Muhammad Ikbal W., atas segala dukungan, nasihat, dan motivasi selama penulis menyelesaikan Tesis ini.
16. Teman-teman Kantor Primagama Wringinanom khususnya Dwi Nur Allen dan Afifi Mutiarani yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan segala bantuannya selama ini.
17. Semua pihak yang turut serta mendukung dalam penyusunan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa, dan negara.

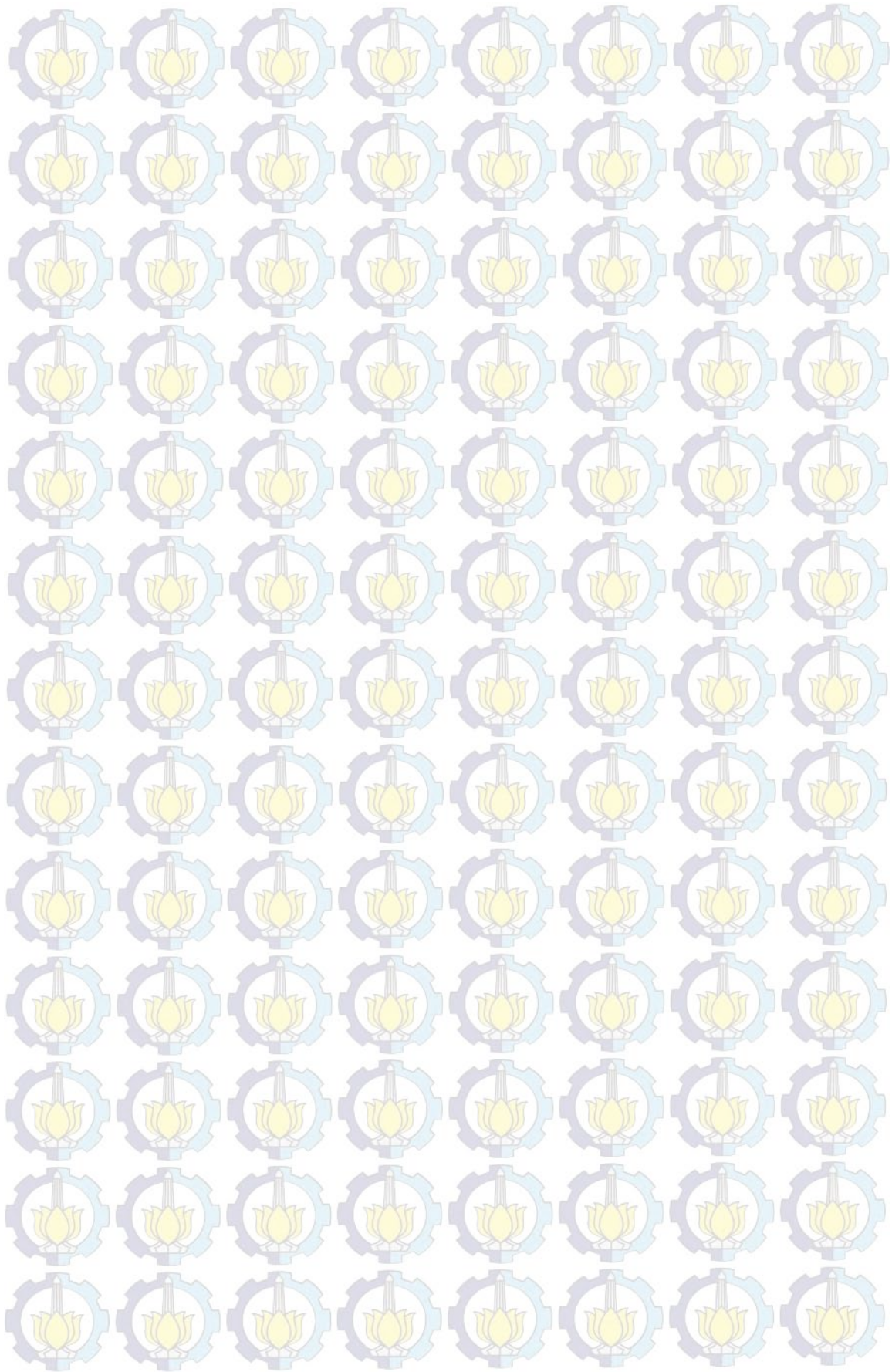
ANALISA ALIRAN TAK TUNAK KONVEKSI PAKSA FLUIDA KENTAL MAGNETOHIDRODINAMIK (MHD) MELEWATI SILINDER ELIPTIK

Nama Mahasiswa : Dwi Ariyani Khalimah
NRP : 1214 201 037
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRAK

Magnetohidrodinamik (MHD) merupakan studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik dan dipengaruhi oleh medan magnet. Aliran MHD penting diteliti terutama yang berkaitan dengan aplikasi bidang teknik dan industri salah satunya yaitu MHD generator. Pada tesis ini dibahas mengenai permasalahan MHD tak tunak pada aliran konveksi paksa yang melewati suatu silinder eliptik pada fluida kental. Aliran fluida kental yang dipengaruhi oleh medan magnet tersebut menimbulkan lapisan batas (boundary layer). Dari lapisan batas tersebut dibentuk persamaan pembangun dimensional. Persamaan pembangun dimensional yang terbentuk adalah persamaan kontinuitas, momentum dan persamaan energi. Kemudian persamaan tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensi dan selanjutnya ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan similaritas. Persamaan similaritas yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box. Pada tesis ini dipelajari mengenai pengaruh beberapa parameter yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, dan variasi sumbu vertikal dan sumbu horizontal. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik, parameter konveksi dan bertambah panjangnya sumbu vertikal. Sedangkan kecepatan menurun dengan bertambahnya sumbu horizontal. Pada saat bilangan Prandtl diperbesar kecepatan mengalami penurunan yang tidak signifikan. Profil temperatur semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi dan sumbu vertikal, sedangkan mengalami kenaikan pada saat penambahan sumbu horizontal.

Kata kunci: konveksi paksa, magnetohidrodinamik, fluida kental, metode Keller-Box



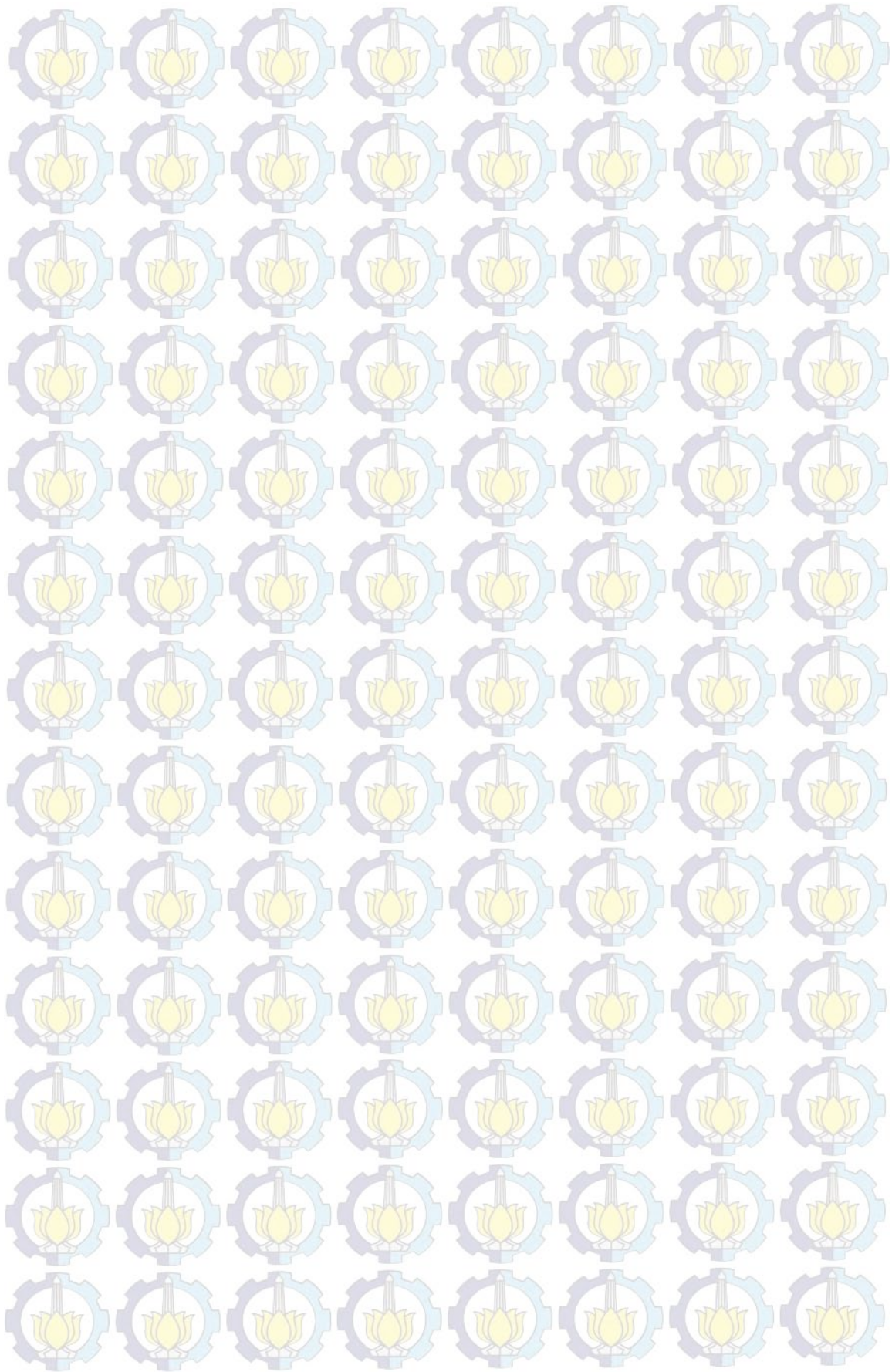
ANALYSIS OF UNSTEADY MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD) FORCED CONVECTIVE VISCOUS FLUID FLOW PAST AN ELLIPTIC CYLINDER

Name : Dwi Ariyani Khalimah
NRP : 1214 201 037
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

ABSTRACT

Magnetohydrodynamic (MHD) is a study about the movement of fluid flow that can conduct electricity and be affected by magnetic fields. MHD flow is an important research area especially in industrial and engineering application, such as MHD generator. These thesis is researched about unsteady MHD problem on forced convection flow through an elliptic cylinder in viscous fluid. Viscous fluid flow that influenced magnetic field evokes boundary layer. From the boundary layer can be formed a dimensional governing equation, they are continuity, momentum and energy equation. After that the equations would be transformed into non-dimensional form and then they were transformed into similarity equation. The similarity equations are solved numerically solution by Keller-Box method. On this thesis is studied about influence some parameters which is magnetic parameter, Prandtl's number, convection parameter, and vertical axis and horizontal axis. The result of numerical simulation that the velocity profile be increased along with magnetic parameter, convection parameter and vertical axis be increased. Meanwhile the velocity profile is decreased when horizontal axis of elliptical cylinder be increased. And when Prandtl's number increased, the velocity profile be decreased but the difference isn't significant. The temperature profile are decreased when magnetic parameter, Prandtl's number, convection parameter and vertical axis of elliptical cylinder increased, meanwhile the temperature profile decrease when the horizontal axis is increased.

Keywords: forced convection, magnetohydrodynamics, viscous fluid, Box Keller Method



BAB I

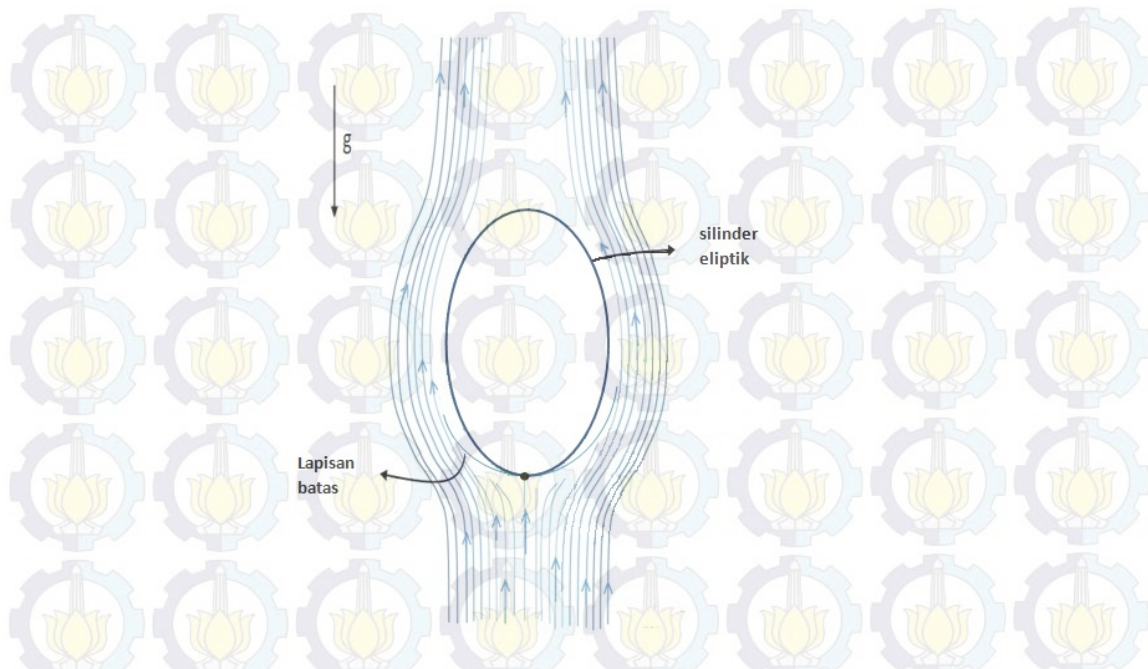
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Magnetohidrodinamik (MHD) merupakan studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik yang dipengaruhi oleh medan magnet. Aliran MHD penting untuk diteliti terutama yang berkaitan dengan aplikasi bidang teknik dan industri. MHD power generator, pendingin reaktor nuklir dan kristal merupakan bentuk pengembangan dari bidang MHD. Saat ini mulai banyak digunakan pembangkit listrik berbasis dengan sistem MHD generator yang memiliki efisiensi tinggi dan rendah polusi. Banyak peneliti yang telah melakukan penelitian mengenai aliran MHD ini yang sampai saat ini masih terus dikembangkan, salah satunya yaitu aliran konveksi paksa MHD (Mohammad, 2014).

Konveksi merupakan perpindahan panas yang biasanya terjadi pada fluida. Secara umum, konveksi dibagi menjadi tiga jenis yaitu konveksi bebas (alamiah), konveksi paksa dan konveksi campuran. Konveksi bebas terjadi ketika aliran fluida dipengaruhi oleh perbedaan temperatur atau yang biasa disebut dengan efek gaya apung, sedangkan konveksi paksa menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh gaya dari luar (Kasim, 2014).

Penelitian mengenai konveksi paksa saat ini juga sedang dikembangkan untuk beberapa jenis fluida, baik itu fluida Newtonian maupun fluida non-Newtonian. Salah satunya yaitu fluida kental yang merupakan fluida Newtonian. Meskipun memiliki tipe dasar yang sederhana, akan tetapi fluida ini banyak diteliti. Saat ini juga telah banyak dilakukan penelitian mengenai pengaruh MHD pada fluida kental. Dengan adanya MHD pada suatu fluida kental akan berpengaruh terhadap tertundanya separasi aliran maupun terjadinya perubahan aliran (Mohammad, 2014, Kudenatti, 2013). Dalam kaitannya dengan perkembangan MHD dalam bidang industri, banyak peneliti yang menyelidiki pengaruh dari MHD pada aliran fluida dan perpindahan panas baik pada fluida Newtonian maupun non-Newtonian. Akan tetapi masih sedikit yang mempelajari tentang pengaruh MHD pada aliran fluida yang tak tunak (Mohammad, 2014). Oleh karena itu, pada tesis ini dilakukan penelitian mengenai permasalahan aliran konveksi paksa pada fluida kental (*viscous*) yang melewati suatu silinder eliptik dan dipengaruhi oleh MHD yang tak tunak.



Gambar 1.1: Lapisan Batas yang Terbentuk Pada saat Fluida Melewati Sebuah Silinder Eliptik

Aliran fluida kental yang melewati silinder eliptik, yang berdasarkan ilustrasi model aliran yang melewati silinder eliptik pada Gambar 1.1 tersebut menimbulkan lapisan batas (*boundary layer*). Persamaan lapisan batas yang diperoleh selanjutnya ditransformasikan dalam bentuk non-dimensi dan selanjutnya ditransformasikan dalam persamaan lapisan batas tak-sama (*non-similar*), kemudian akan diselesaikan secara numerik menggunakan metode Keller-Box. Hasil numerik yang diperoleh berupa profil kecepatan dan profil temperatur untuk beberapa variasi parameter magnetik dan bilangan Prandtl, selain itu juga didapatkan profil kecepatan dan temperatur dipengaruhi adanya parameter konveksi, sumbu vertikal dan sumbu horizontal silinder eliptik yang digambarkan dalam bentuk grafik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana model matematika dari aliran konveksi paksa MHD tak tunak pada fluida kental yang melewati silinder eliptik.
2. Bagaimana menyelesaikan model matematika aliran konveksi paksa MHD tak tunak pada fluida kental yang melewati silinder eliptik dengan menggunakan skema Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*) Keller-Box.

3. Bagaimana pengaruh bilangan Prandtl, parameter magnetik, parameter konveksi, sumbu vertikal dan sumbu horizontal silinder terhadap profil kecepatan dan profil temperatur pada aliran.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Fluida yang digunakan bersifat tak mampu-mampat (*incompressible*).
2. Posisi silinder eliptik yang diamati adalah yang tegak lurus dengan aliran.
3. Aliran fluida dua dimensi yang melewati elips.
4. Silinder eliptik yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa ada halangan didekat silinder.
5. Tidak ada induksi medan magnet yang terjadi pada aliran fluida dan silinder eliptik.
6. Tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida sehingga pada silinder eliptik medan listriknya sama dengan nol.
7. Penyelesaian numerik menggunakan skema Metode Beda Hingga Keller-Box.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Menyusun model matematika dari aliran konveksi paksa MHD tak tunak pada fluida kental yang melewati silinder eliptik.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model aliran konveksi paksa MHD tak tunak pada fluida kental yang melewati silinder eliptik dengan menggunakan skema Metode Beda Hingga Keller-Box.
3. Menganalisis pengaruh bilangan Prandtl, parameter magnetik, parameter konveksi, sumbu vertikal dan sumbu horizontal silinder terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan di bidang teknologi dan industri, khususnya aplikasi metode beda hingga Keller-Box pada permasalahan aliran fluida dan pengaruh MHD pada permukaan silinder eliptik.

1.6 Kontribusi Hasil Penelitian

Kontribusi hasil penelitian ini terhadap pengembangan ilmu di bidang teknologi dan industri adalah pada perusahaan pembangkit listrik dengan MHD generator, reaktor pendingin nuklir dan kristal.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Bab ini menjelaskan mengenai penelitian terdahulu dan teori yang digunakan dalam penelitian ini. Berikut adalah uraian dari penelitian-penelitian yang pernah dilakukan sebelumnya dan teori yang berkaitan dengan penyelesaian masalah dalam penelitian ini.

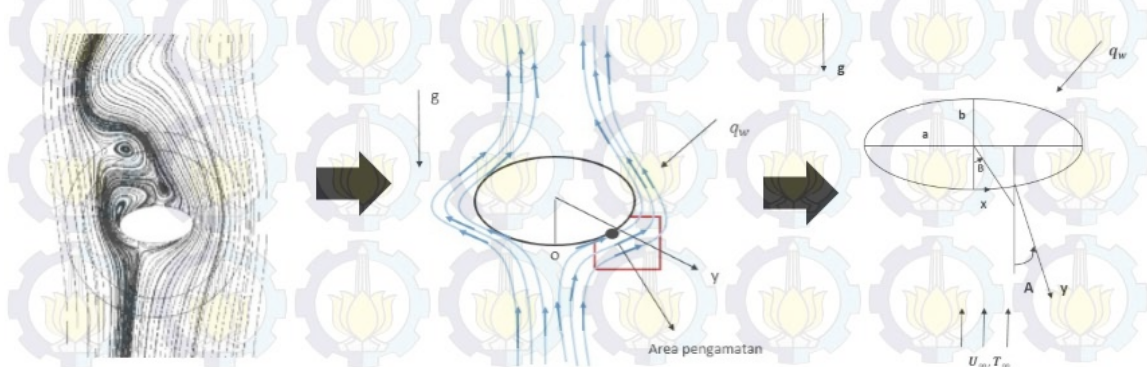
2.1 Penelitian Terdahulu

Pada penelitian yang dilakukan oleh Mohammad (2014), tentang aliran lapisan batas MHD tak tunak, telah dijelaskan beberapa permasalahan yang membahas mengenai aliran konveksi paksa maupun aliran konveksi campuran pada fluida kental yang melewati bola. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh adanya medan magnet terhadap profil kecepatan, profil temperatur dan *skin friction*. Pada penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa nilai parameter magnetik jika ditingkatkan atau diperbesar maka dapat meningkatkan ketebalan dari lapisan batas. Dengan meningkatnya parameter magnetik didapatkan bahwa kecepatan yang dihasilkan semakin meningkat, dan temperatur semakin menurun.

Pada penelitian Kudenatti (2013) dalam paper *MHD Boundary Layer Flow Over A Non-Linear Stretching Boundary with Suction and Injection* menjelaskan mengenai pengaruh MHD yaitu ketika nilai dari parameter magnet atau bilangan Hartmann ditingkatkan atau diperbesar maka dapat mengakibatkan ketebalan lapisan batas menurun atau menipis. Hal ini menjelaskan tren hubungan timbal balik antara medan magnet dan aliran fluida. Untuk parameter magnet atau bilangan Hartmann yang nilainya kecil dapat meningkatkan nilai parameter aliran fluida, sehingga dapat menyebabkan aliran fluida bergerak cepat. Selain itu, nilai-nilai koefisien dari gesekan kulit akan meningkat dengan meningkatnya parameter magnetik yang dilibatkan. Selain itu Abel dan Nandeppanavar (2009) menjelaskan bahwa nilai koefisien *skin friction* pada aliran konveksi paksa semakin meningkat akibat dari adanya gaya magnet. Medan magnet yang bertambah dengan cepat dapat mengakibatkan ketebalan lapisan batas menjadi lebih tebal.

Penelitian pada aliran fluida yang melewati silinder eliptik pernah dilakukan oleh Cheng (2012), Bharti (2007), dan Sulistyaningtyas (2015). Pada penelitian yang dilakukan oleh Cheng (2012) tentang aliran konveksi bebas pada lapisan

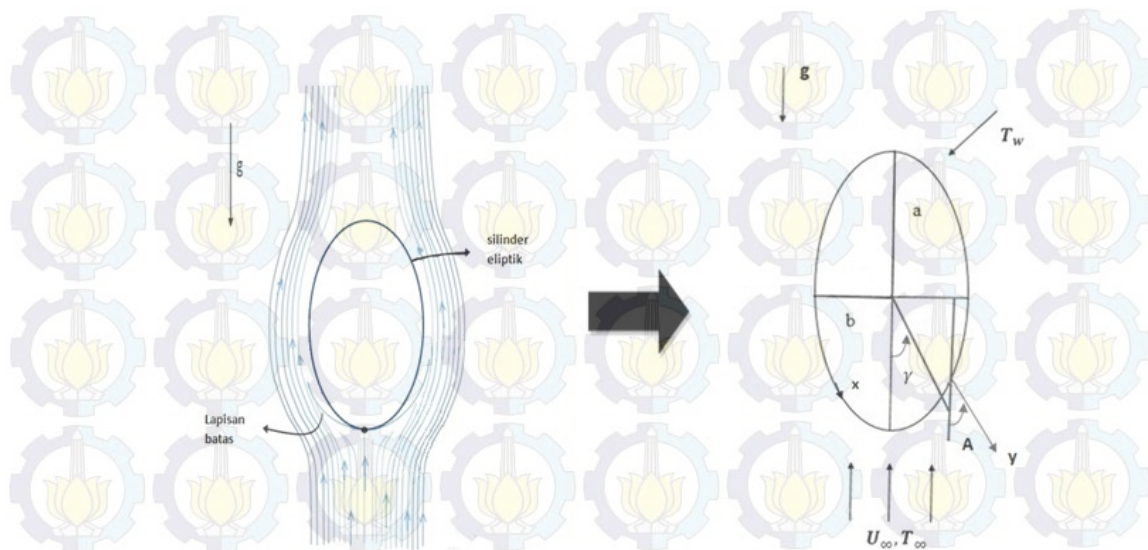
batas yang melalui silinder eliptik horizontal pada fluida nano atau nanofluid dengan temperatur dinding dan partikel nano yang tetap. Pada penelitian yang dilakukan menunjukkan bahwa bilangan Nusselt meningkat seiring dengan parameter thermophoresis dan parameter Brownian yang semakin rendah. Selain itu juga dijelaskan bahwa bilangan Nusselt pada saat penampang silinder eliptik berbentuk *bluff body* atau sumbu mayor pada arah vertikal lebih besar dari pada silinder eliptik berbentuk *blunt body* atau sumbu mayor arah horizontal. Penelitian juga dilakukan oleh Bharti (2007) mengenai perpindahan panas konveksi paksa dari silinder eliptik pada *power-law fluid*. Pada penelitian tersebut dijelaskan bahwa bilangan Nusselt dari silinder eliptik bergantung pada bilangan Reynold dan bilangan Prandtl. Selain itu, pada penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa perpindahan panas lebih mudah terjadi pada fluida yang cepat encer akibat geseran (*shear thinning fluid*), sementara perpindahan panas akan terhambat pada fluida yang mengental akibat geseran (*shear thickening fluid*).



Gambar 2.1: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik pengamatan Sulistyningtyas (2015)

Penelitian yang dilakukan oleh Sulistyningtyas (2015) sesuai dengan Gambar 2.1 yaitu tentang pengaruh aliran fluida viskoelastik yang melewati silinder eliptik. Berdasarkan penelitiannya disebutkan bahwa dengan bertambahnya bilangan Prandtl maka dihasilkan distribusi kecepatan dan temperatur yang semakin kecil. Selain itu, pada penelitian yang dilakukan Sulistyningtyas (2015) juga menyebutkan bahwa semakin besar luas penampang silinder eliptik, maka distribusi temperatur dan kecepatannya semakin kecil.

Berdasarkan penelitian-penelitian yang sudah pernah dilakukan, pada penelitian ini akan dilakukan penelitian pengembangan yaitu penelitian pada fluida kental yang bermedan magnet yang alirannya tak tunak dengan penyebaran panas konveksi paksa dan objek geometri yang digunakan adalah silinder eliptik *bluff body*. Gambar



Gambar 2.2: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik *bluff body*

fisik dan sistem koordinat secara umum dari permasalahan ini dapat dilihat pada Gambar 2.2. Selain itu, pada penelitian ini akan digunakan metode Keller-Box untuk menyelesaikan permasalahan secara numerik.

2.2 Fluida

Terdapat tiga fase zat yang tersebar di alam, yaitu fase padat, gas, dan cair. Karena fase gas dan cair tidak dapat mempertahankan bentuk yang tetap, maka keduanya mempunyai kemampuan untuk mengalir, dengan demikian keduanya disebut dengan fluida. Fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu bila terkena tegangan geser, berapapun tegangan geser tersebut (Widodo, 2012).

Perbedaan zat cair dan gas ialah zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*), sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengecilan) volume karena adanya perubahan tekanan. Untuk fluida cair, tekanan dapat diabaikan dan viskositasnya akan turun dengan cepat bila temperaturnya dinaikkan. Pada fluida mengenal adanya viskositas atau kekentalan fluida dan berdasarkan karakteristiknya, fluida fase cair dibagi menjadi dua yaitu, fluida *Newtonian* dan *Non-Newtonian*.

2.2.1 Viskositas

Viskositas adalah ukuran kekentalan fluida yang menyatakan besar kecilnya gesekan di dalam fluida. Makin besar viskositas suatu fluida, makin sulit fluida mengalir dan makin sulit suatu benda untuk bergerak dalam fluida tersebut. Oleh karena itu, viskositas dari suatu fluida dapat menjelaskan ketahanan internal fluida

untuk mengalir dan dapat digunakan untuk menganalisa pengukuran dari pergeseran suatu fluida. Viskositas zat cair secara umum berkurang sejalan dengan peningkatan suhu. Sedangkan viskositas gas secara umum bertambah sejalan dengan peningkatan suhu. Hal ini dapat dikatakan bahwa Viskositas zat cair berbanding terbalik dengan suhu zat, sedangkan viskositas gas berbanding lurus dengan suhu suatu zat. Semua fluida (kecuali superfluida) memiliki ketahanan dari tekanan sehingga disebut kental, tetapi fluida yang tidak memiliki ketahanan tekanan dan tegangan disebut fluida ideal.

2.2.2 Fluida Newtonian

Fluida *Newtonian* adalah suatu fluida yang memiliki kurva tegangan/regangan yang linier. Keunikan dari fluida *Newtonian* adalah fluida ini akan terus mengalir sekalipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Hal ini disebabkan karena viskositas dari suatu fluida *Newtonian* tidak berubah ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida. Viskositas dari suatu fluida *Newtonian* hanya bergantung pada temperatur dan tekanan. Viskositas sendiri merupakan suatu konstanta yang menghubungkan besar tegangan geser dan gradien kecepatan pada persamaan

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dengan:

τ = tegangan geser pada fluida ($\frac{N}{m^2}$)

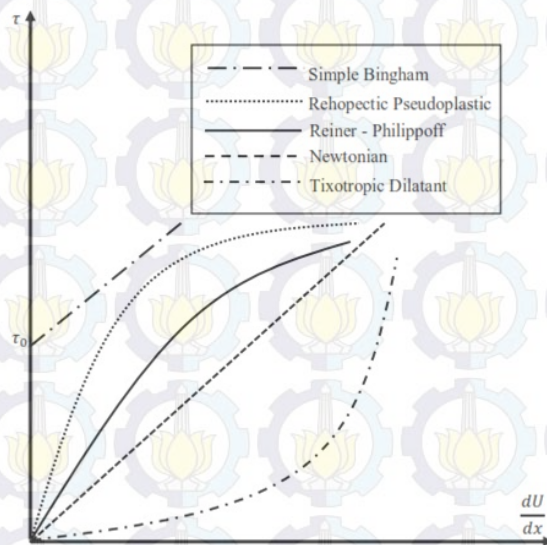
μ = viskositas fluida ($\frac{N}{m^2} \cdot s$)

$\frac{du}{dy}$ = gradien kecepatan fluida (s^{-1})

2.2.3 Fluida Non-Newtonian

Fluida *non-Newtonian* adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini yang menyebabkan fluida *non-Newtonian* tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida *Newtonian*). Berikut ini adalah contoh dari fluida *non-Newtonian* dalam kehidupan sehari-hari, yakni fluida plastik padat, fluida eksponensial, fluida viskoelastik (yang memiliki karakteristik viskos dan elastik), fluida tiksotropik atau fluida yang viskositasnya bergantung pada waktu, dan fluida rheopektik atau fluida yang viskositasnya seolah makin lama makin besar.

Berdasarkan kedua uraian tentang karakteristik suatu fluida diatas, perbedaan antara fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan *non-Newtonian* adalah linier dan tidaknya antara tegangan geser dengan gradien kecepatannya. Hal ini diperjelas melalui gambar yang menunjukkan kurva antara tegangan geser dengan gradien



Gambar 2.3: Klasifikasi Fluida

kecepatan fluida yang berkarakteristik *Newtonian* dan *non-Newtonian* (Potter, 2008)

2.3 Tipe Aliran Fluida Berdasarkan Kriteria Waktu

Tipe aliran fluida yang memiliki pengaruh terhadap perubahan waktu pada umumnya dibagi menjadi dua, yaitu: (Widodo, 2012)

1. Aliran Tunak (*Steady Flow*) Aliran tunak yaitu kecepatan aliran fluida tidak dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

2. Aliran Tak Tunak (*Unsteady Flow*) Aliran tak tunak yaitu kecepatan aliran fluida yang dipengaruhi oleh perubahan waktu. Pada aliran tak tunak berlaku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$$

2.4 Perpindahan Panas Konveksi

Pada umumnya terdapat tiga tipe dari perpindahan panas yaitu konduksi, konveksi dan radiasi. Secara umum, jenis perpindahan panas yang biasa terjadi diantara fluida adalah konveksi. Perpindahan panas konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh perbedaan

temperatur dan menggunakan fluida sebagai penghantarnya. Secara umum konveksi dapat dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu konveksi bebas (alamiah), konveksi paksa dan konveksi campuran.

2.4.1 Konveksi Bebas (Free Convection Flow)

Konveksi bebas (alamiah) terjadi pada saat pergerakan fluida yang disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis sesuai dengan variasi temperatur pada fluida. Contoh konveksi bebas yaitu asap yang berasal dari api, fenomena ini dapat dilihat ketika suatu hutan terbakar, asap akan naik ke atas karena adanya perbedaan massa jenis antara asap dan udara sekitar (Kasim, 2014).

2.4.2 Konveksi Paksa (Forced Convection Flow)

Konveksi paksa terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal, sedangkan gaya apung diabaikan. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir melalui pipa, sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan dari benda solid atau dapat dikatakan pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar. Konveksi paksa menggambarkan perpindahan panas pada fluida yang dipengaruhi oleh gaya dari luar (Kasim, 2014). Konveksi paksa, dalam pengaplikasiannya pada perpindahan panas, sering digunakan untuk meningkatkan laju perubahan panas.

2.4.3 Konveksi Aliran Campuran (Mixed Convection Flow)

Pada perkembangan perpindahan panas konveksi, dikenal konveksi alir campuran (*mixed convection flows*) atau konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi bebas dan aliran konveksi paksa. Konveksi campuran terjadi pada saat efek dari konveksi paksa pada konveksi bebas menjadi signifikan. Contoh dari konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita lihat pada saat asap timbul dari api (konveksi bebas) dan pada saat bersamaan asap juga ditimbulkan oleh faktor eksternal seperti ledakan dari gas silinder (konveksi paksa).

2.5 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Boundary layer atau lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. *Boundary layer* suatu fluida dipengaruhi oleh viskositas maupun gaya inersia benda tersebut. Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

2.5.1 Aliran Laminar

Pada aliran laminar, partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar.

2.5.2 Aliran Transisi

Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen karena adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$).

2.5.3 Aliran Turbulen

Aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ($Re > 12.500$).

Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (2.1)$$

dengan:

Re = bilangan Reynolds

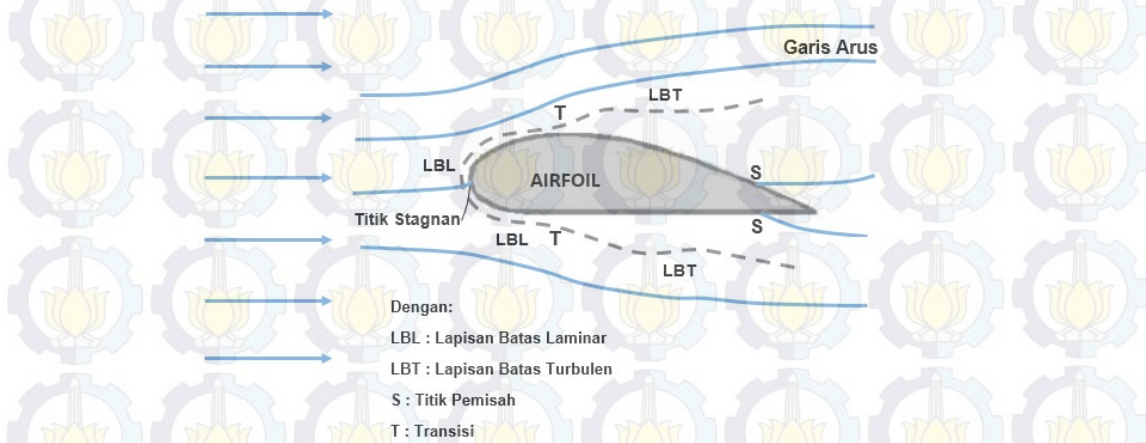
U_{∞} = kecepatan pada aliran bebas ($\frac{m}{s}$)

a = panjang karakteristik

ν = komponen kecepatan pada arah-y

Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran boundary layer, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain yang juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, *automobile* dan teknik kelautan. Beberapa penelitian dengan menggunakan *boundary layer* pun sudah sering dilakukan contohnya aliran fluida pada pelat datar (Hussanan, dkk (2014)),

aliran fluida pada sirkular silinder (Anwar, dkk(2008)) dan aliran fluida pada bola (Mohammad (2014))



Gambar 2.4: Lapisan Batas di Sekitar *Airfoil*

Secara garis besar, contoh sederhana dari lapisan batas di fluida viskos dapat dijumpai di *airfoil* karena selama ini penelitian terhadap lapisan batas berkembang diawali dengan adanya minat para peneliti pada *airfoil*. Gambaran lapisan batas di sekitar *airfoil* dapat dilihat pada Gambar 2.4.

2.6 Magnetohidrodinamik (MHD)

Magnetohidrodinamik (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai pergerakan aliran fluida yang dapat menghantarkan listrik (konduksi listrik) yang dipengaruhi oleh medan magnet. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. Kata MHD berasal dari kata *magneto-* yang berarti medan magnet, *-hydro-* yang berarti cairan dan *-dynamics* yang berarti perubahan. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfven seorang fisikawan yang pernah mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. MHD berperan penting dalam fisika solar, astrofisika, fisika plasma, dan eksperimen plasma laboratorium. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

dengan:

B = medan magnet

E = medan listrik

V = kecepatan massal plasma

J = kerapatan arus

ρ = massa jenis

p = tekanan plasma

t = waktu

μ_0 = permeabilitas ruang hampa ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)

Pada permasalahan MHD Persamaan (2.2) pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan (2.2) hanya digunakan pada kondisi awal (*initial condition*). Selain itu, untuk frekuensi/kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD

dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B \quad (2.6)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.8)$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + v \times B = \eta J \quad (2.9)$$

jika $\eta = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

2.7 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yaitu beda maju, beda pusat dan beda mundur. Berikut ini akan disajikan macam-macam metode beda hingga yaitu:

a. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

b. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

c. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

2.7.1 Skema Keller-Box

Metode Keller-Box) adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode

Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu. Berikut adalah contoh mengubah persamaan diferensial orde dua menjadi orde satu:

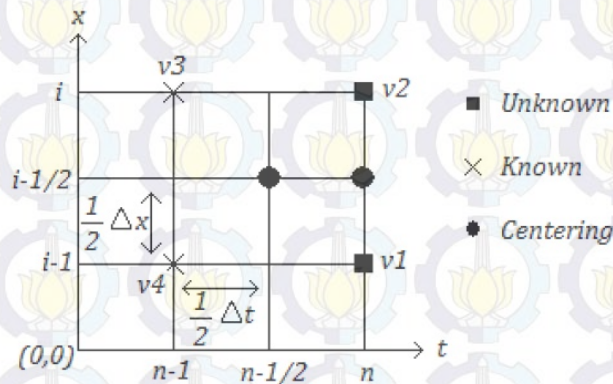
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan mendefinisikan

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}$$

sehingga bentuk persamaan orde kedua tersebut dapat dituliskan menjadi dua persamaan orde pertama sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$



Gambar 2.5: Stensil Skema Keller-Box

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada Gambar 2.5 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = v_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (2.10)$$

$$2 \frac{u_{i-\frac{1}{2}}^n - u_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t_n} = \frac{\alpha(v_i^n - v_{i-1}^n)}{\Delta x_i} + \frac{\alpha(v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{\Delta x_i} \quad (2.11)$$

Karena menggunakan titik-titik pada step size setengah maka berlaku

$$\begin{aligned} u_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \\ v_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{v_i^n + v_i^{n-1}}{2} \end{aligned}$$

secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} ()_i^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_i^{n-1}] \\ (\cdot)_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_{i-1}^n] \end{aligned}$$

Selanjutnya disubstitusikan ke Persamaan (2.10) dan (2.11) didapatkan

$$\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x_i} = \frac{v_i^n + v_{i-1}^n}{2} \quad (2.12)$$

$$2 \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta t_n} = \alpha \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x_i} + \alpha \frac{v_i^{n-1} - v_{i-1}^{n-1}}{\Delta x_i} + 2 \frac{u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{\Delta t_n} \quad (2.13)$$

Berdasarkan hasil pada Persamaan (2.12) dan (2.13), selanjutnya dapat direpresen-
tasikan dalam bentuk matriks tridiagonal.

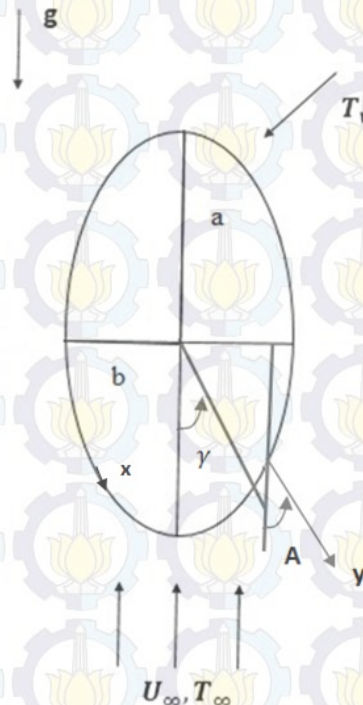
BAB III

METODA PENELITIAN

Bab ini menjelaskan mengenai tahapan dan tempat penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan aliran konveksi paksa MHD tak tunak yang melewati silinder eliptik pada fluida kental. Adapun tahapan dan tempat penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut

3.1 Tahapan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dijelaskan pada BAB I, penelitian ini diselesaikan dengan menggunakan tiga tahap, yaitu tahap analisa awal atau analisa permasalahan, tahap implementasi, dan tahap penyelesaian dan analisa akhir.



Gambar 3.1: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui silinder eliptik *bluff body*

3.1.1 Tahap Analisa Awal

Pada penelitian ini fluida kental memiliki pengaruh yang cukup dominan karena viskositas memiliki pengaruh besar pada fluida Newtonian. Penelitian ini dilakukan pada daerah lapisan batas dengan membangun model aliran dari tiga hukum, yaitu hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Pada penelitian ini model yang dibangun adalah model matematika di daerah lapisan batas dari silinder eliptik *bluff body*, yakni disekitar titik stagnasi terendah ($x \approx 0$). Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda.

Pada Gambar 3.1 dapat diketahui bahwa fluida kental bergerak dari bawah ke atas melewati sebuah silinder eliptik yang memiliki panjang sumbu vertikal atau sumbu yang searah dengan aliran (a), dan panjang sumbu pada arah horizontal (b), dengan kecepatan *ambient fluid* U_∞ dan temperatur seragam T_∞ .

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dilakukan langkah-langkah dalam menjawab rumusan masalah pada Bab I, yaitu:

1. Studi literatur
2. Penurunan persamaan konservasi massa, hukum Newton II, dan hukum I Termodinamika untuk mendapatkan persamaan pembangun
3. Persamaan pembangun disederhanakan dengan menggunakan pendekatan Boussinesq dan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran konveksi paksa MHD tak tunak yang melewati silinder eliptik pada fluida kental
4. Menentukan kondisi batas

3.2 Tahapan Implementasi

Pada tahap ini, dilakukan implementasi metode Keller Box yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi dengan metode ini adalah persamaan similaritas, yang mana persamaan similaritas dari model ini didapatkan dengan melakukan beberapa tahapan berikut:

1. Persamaan pembangun yang berdimensi disederhanakan dan ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensional dengan menggunakan variabel non-dimensional.
2. Mengubah non-dimensional ke persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir (*stream function*) pada silinder eliptik.

Persamaan similaritas model aliran konveksi paksa MHD tak tunak yang melewati sebuah silinder eliptik pada fluida kental pada titik stagnasi terendah ($x \approx 0$) adalah sebagai berikut

$$f''' + \frac{\eta}{2}f'' + t(1 - (f')^2 + ff'') + Mt(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$s'' + \text{Pr} \frac{\eta}{2}s' + \text{Pr}tfs' = \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (3.2)$$

Implementasi metode Keller-Box pada Persamaan (3.1) dan (3.2) dilakukan dengan terlebih dahulu mengubah kedalam bentuk orde pertama yang kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda pusat.

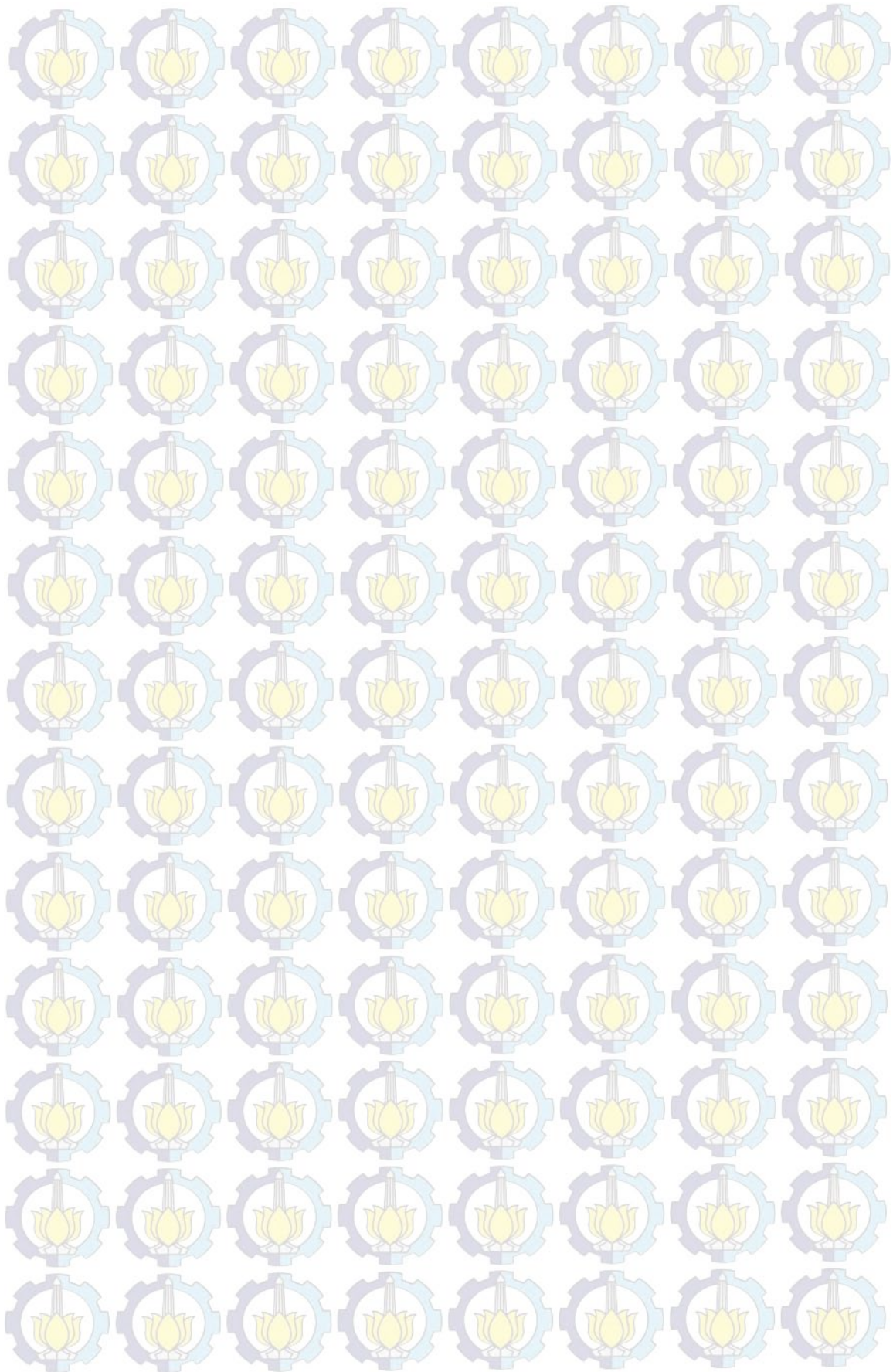
3.2.1 Tahap Analisis Akhir

Pada tahap ini dilakukan beberapa tahapan sebagai berikut:

1. Hasil diskritisasi dari Persamaan (3.1) dan (3.2) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Matlab.
2. Dilakukan variasi pada parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr), parameter konveksi (α) dan panjang sumbu (a) dan sumbu (b). Hal ini dilakukan untuk mengetahui pengaruh parameter-parameter tersebut terhadap karakteristik dari fluida yaitu profil kecepatan dan profil temperatur.
3. Visualisasi hasil numerik dilakukan dengan menggunakan Matlab untuk mempermudah dan mendukung hasil-hasil pengukuran.
4. Analisa hasil dari simulasi numerik yang dipengaruhi oleh parameter-parameter terhadap karakteristik fluida.

3.3 Tempat Penelitian

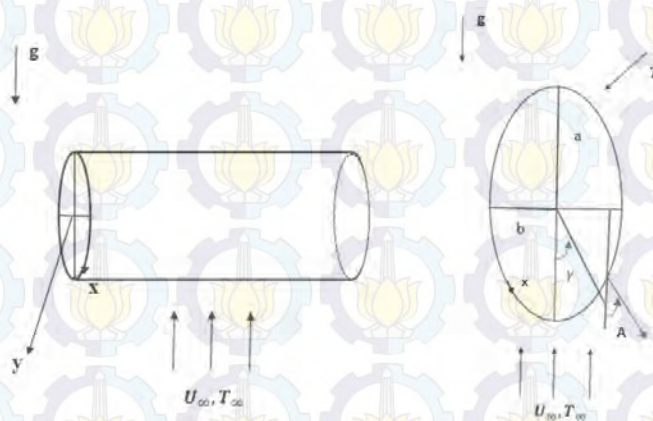
Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.



BAB IV

MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai model matematika aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati silinder eliptik dalam bentuk model matematika yang berdimensi kemudian ditransformasikan ke bentuk model matematika yang tak berdimensi dan selanjutnya dibentuk dalam model similar. Model matematika aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati sebuah silinder eliptik didapat dari persamaan pembangun. Persamaan pembangun yang digunakan untuk membangun model didapatkan dari penurunan hukum konservasi massa, hukum II Newton, dan hukum I Termodinamika. Hasil penurunan tersebut membentuk tiga



Gambar 4.1: Bentuk 3-Dimensi (kiri) dan Sistem Koordinat Silinder Eliptik 2-Dimensi (kanan)

persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Berikut ini deskripsi dari permasalahan aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati silinder eliptik diilustrasikan pada Gambar 4.1.

Pada Gambar 4.1 menunjukkan sistem koordinat dari silinder eliptik. Berdasarkan Gambar 4.1, aliran dari fluida pada permasalahan ini dianggap bergerak dari bawah ke atas melewati permukaan sebuah silinder eliptik dengan suhu fluida disekitar silinder eliptik (T_{∞}). Pada penelitian ini diasumsikan bahwa kecepatan aliran fluida sebelum melewati silinder eliptik yaitu U_{∞} . Aliran pada fluida kental ini dalam keadaan tak tunak (*unsteady*) dan *incompressible*. Aliran

konveksi paksa pada fluida kental yang melewati permukaan sebuah silinder eliptik ini membentuk lapisan batas, dan dari lapisan batas tersebut selanjutnya dikonstruksi model matematika.

4.1 Persamaan Pembangun Model Matematika

Persamaan pembangun adalah persamaan yang diuraikan dari lapisan batas yang terbentuk didekat permukaan silinder eliptik akibat dari aliran fluida yang melewati silinder eliptik. Persamaan pembangun yang digunakan didapatkan dari Hukum Kekekalan Massa, Hukum II Newton dan Hukum I Termodinamika. Berikut adalah uraian untuk persamaan pembangun yang digunakan membangun model.

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Konsep dari hukum konservasi massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem sama dengan nol atau jumlah massa dalam suatu sistem adalah konstan. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut (Potter dkk, 2012):

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0 \quad (4.1)$$

dengan $\frac{D()}{Dt}$ disebut sebagai turunan material dan M_{sys} adalah massa sistem yang sama dengan jumlah dari semua perkalian antara densitas fluida dengan volume fluida pada sistem tersebut yang dinyatakan dengan

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho dV \quad (4.2)$$

dengan ρ adalah densitas fluida dan V adalah volume fluida. Dengan mensubstitusikan Persamaan (4.2) pada Persamaan (4.1) didapatkan bentuk:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = 0 \quad (4.3)$$

Dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynolds, laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem dapat dituliskan sebagai berikut

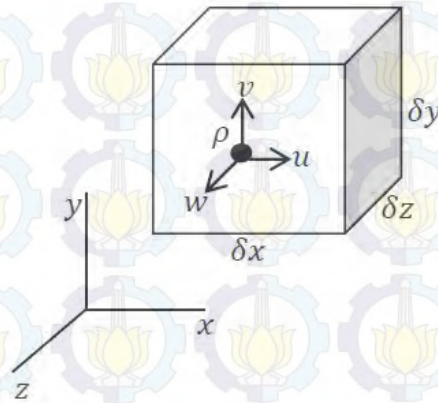
$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.4)$$

sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (4.4) ke Persamaan (4.3) didapatkan

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \quad (4.5)$$

dengan $\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$ merupakan perkalian dari komponen kecepatan \mathbf{u} yang tegak lurus terhadap suatu bagian kecil permukaan atur dan bidang diferensial dA . Jadi $\mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$ meruoakan laju dari aliran volume yang melalui dA dan $\rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA$ laju aliran massa melalui dA . Sehingga persamaan volume atur untuk kekekalan massa dinyatakan dalam bentuk:

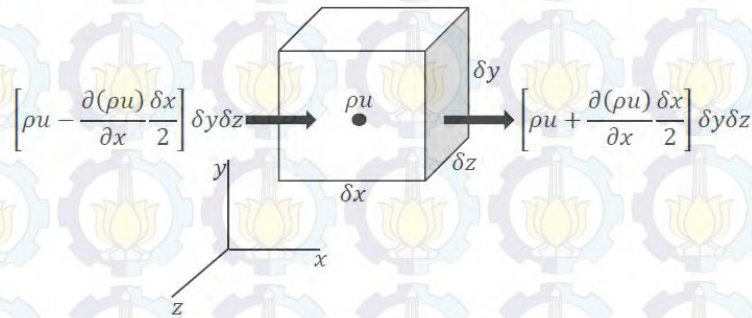
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA = 0 \quad (4.6)$$



Gambar 4.2: Volume Atur

Dimisalkan volume atur yang digunakan berupa sebuah elemen kubus kecil dalam keadaan diam seperti pada Gambar 4.2. Pada bagian pusat elemen terdapat densitas ρ dan komponen kecepatan u , v , dan w . Karena elemen diasumsikan kecil, maka laju perubahan terhadap waktu dari massa dari kandungan volume atur yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4.7)$$



Gambar 4.3: Aliran Fluida Masuk dan Keluar Volume Atur

Jumlah aliran massa pada permukaan elemen dapat diperoleh dari aliran sumbu koordinat yang digambarkan secara terpisah. Seperti pada Gambar 4.3, aliran pada sumbu- x digambarkan dengan jumlah massa dari aliran yang masuk dan keluar dari bagian pusat elemen, sehingga pada aliran yang keluar didefinisikan:

$$\rho u \Big|_{x+\frac{\delta x}{2}} = \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.8)$$

sedangkan untuk bagian aliran yang masuk

$$\rho u \Big|_{x-\frac{\delta x}{2}} = \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad (4.9)$$

Sehingga jumlah aliran massa yang keluar pada arah- x dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (4.10)$$

Dengan langkah yang sama, didapatkan aliran massa yang keluar pada arah- y berikut ini:

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z - \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right] \delta x \delta z = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (4.11)$$

dan aliran massa yang keluar pada arah- z adalah

$$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y - \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right] \delta x \delta y = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (4.12)$$

Sehingga total aliran dapat ditulis sebagai berikut

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.13)$$

Jadi laju terhadap perubahan waktu dari massa sistem yaitu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (4.14)$$

kedua ruas dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ didapatkan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

Pada penelitian ini diasumsikan bahwa aliran fluida yang dianalisa adalah aliran

fluida pada bidang xoy , sehingga persamaannya menjadi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (4.16)$$

Persamaan (4.16) dapat ditulis dalam bentuk notasi vektor sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (4.17)$$

Karena pada penelitian ini fluida bersifat *incompressible* yang berarti bahwa densitas fluida tidak bergantung terhadap waktu ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) sehingga persamaan kontinuitas diberikan sebagai berikut

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.18)$$

dengan $\mathbf{u} = (u, v, 0)$

4.1.2 Persamaan Momentum

Selain persamaan kontinuitas, persamaan momentum berperan dalam pembentukan model aliran fluida. Prinsip dari persamaan momentum adalah hukum II Newton, yaitu jumlah gaya yang bekerja pada sistem sama dengan besar momentum pada sistem yang berubah terhadap waktu. Karena momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan, maka momentum dari sebuah partikel kecil ρdV adalah $\mathbf{u}\rho dV$, sehingga momentum dari seluruh sistem adalah $\int_{sys} \rho \mathbf{u} dV$. Secara matematis Hukum II Newton dapat ditulis sebagai berikut (Potter dkk, 2012):

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{u} dV = \sum F \quad (4.19)$$

dengan menggunakan Teorema Transport Reynolds, laju perubahan terhadap waktu dari momentum sistem sama dengan jumlahan laju perubahan terhadap waktu dari momentum kandungan volume atur dan laju aliran netto dari momentum melewati permukaan atur, yang dapat dituliskan sebagai

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{u} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV \mathbf{u} + \int_{cs} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{n} dA \cdot \mathbf{u} \quad (4.20)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.20) ke Persamaan (4.19) didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \mathbf{u} dV + \int_{cs} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA = \sum F \quad (4.21)$$

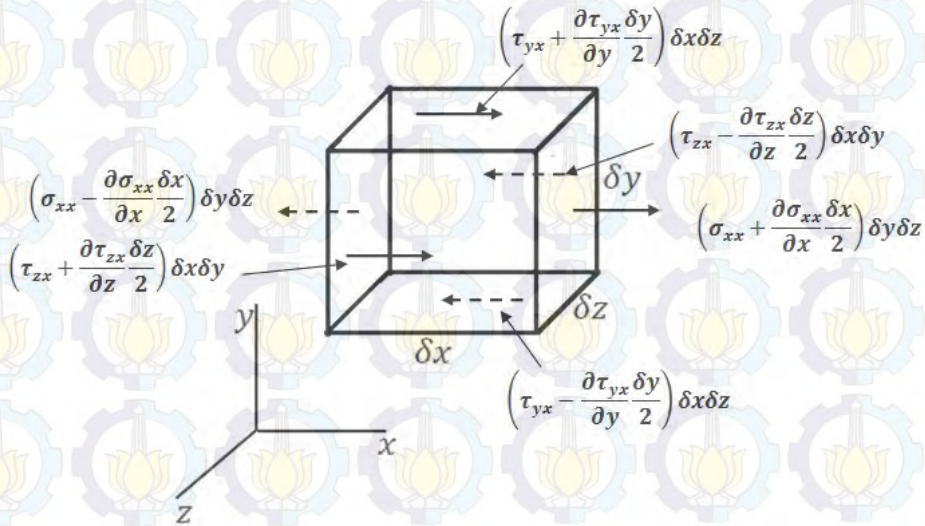
dengan $\mathbf{u} \cdot \hat{n}$ merupakan bentuk skalar yang terjadi disetiap luasan dA . Bentuk integral permukaan kendali menunjukkan flux momentum net yang melewati permukaan kendali fluida yang masuk maupun keluar volume kendali.

Berdasarkan persamaan kontinuitas, Persamaan (4.21) dapat dibentuk dalam notasi vektor yaitu

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.22)$$

Berdasarkan sifat diferensi bahwa $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}))$ karena $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ maka $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, sehingga Persamaan (4.22) menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \delta x \delta y \delta z = \sum F \quad (4.23)$$



Gambar 4.4: Gaya-gaya Permukaan dalam Arah x yang Bekerja pada Elemen Fluida

Dengan $\sum F$ menunjukkan komponen gaya-gaya yang bekerja pada permukaan silinder eliptik. Komponen gaya-gaya tersebut adalah gaya permukaan, gaya apung dan gaya magnet. Dengan demikian Persamaan (4.23) dapat ditulis sebagai berikut

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \delta x \delta y \delta z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_{buo} + \mathbf{F}_{mag} \quad (4.24)$$

yang mana \mathbf{F}_s adalah gaya permukaan, \mathbf{F}_{buo} adalah gaya apung dan \mathbf{F}_{mag} adalah gaya magnet. Pada Persamaan (4.24) kedua ruas dibagi dengan $\delta x \delta y \delta z$ sehingga

didapatkan

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\mathbf{F}_{buo}}{\delta x \delta y \delta z} + \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} \quad (4.25)$$

Gaya permukaan atau \mathbf{F}_s bekerja pada elemen sebagai hasil interaksinya dengan sekelilingnya. Gaya-gaya permukaan yang bekerja pada sebuah elemen kubus kecil dari sebuah fluida dalam bentuk tegangan-tegangan yang bekerja pada permukaan seperti pada Gambar 4.4. Dapat dinyatakan tegangan-tegangan pada berbagai permukaan dalam bentuk tegangan-tegangan pada berbagai permukaan dalam bentuk tegangan-tegangann yang bersesuaian pada pusat elemen. Dengan menjumlahkan seluruh gaya pada arah- x dapat diuraikan sebagai berikut

$$\mathbf{F}_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.26)$$

dan gaya dalam arah y

$$\mathbf{F}_{sy} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (4.27)$$

Sehingga dapat dituliskan resultan gaya permukaan yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \mathbf{F}_{sx} \hat{i} + \mathbf{F}_{sy} \hat{j} \\ \frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Untuk fluida Newtonian tak mampu-mampat, diketahui bahwa tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi dan dapat dinyatakan sebagai berikut

a. Tegangan normal

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.29)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.30)$$

b. Tegangan geser

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.31)$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (4.29) - (4.31) pada Persamaan (4.28) didapatkan

$$\frac{\mathbf{F}_s}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.32)$$

Selain gaya permukaan yang bekerja, juga terdapat gaya Lorentz dalam

persamaan momentum karena adanya medan magnet, maka Gaya Lorentz dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (4.33)$$

dengan \mathbf{E} adalah medan listrik, \mathbf{J} massa jenis arus, dan \mathbf{B} adalah total medan magnet. Massa jenis arus dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (4.34)$$

yang mana σ adalah konduktifitas listrik. Jika disubstitusikan Persamaan (4.34) ke Persamaan (4.33) didapatkan

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \mathbf{E} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.35)$$

karena pada penelitian ini aliran tidak mengandung arus listrik maka $\mathbf{E} = 0$, sehingga Persamaan (4.35) menjadi

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (4.36)$$

dengan menggunakan identitas vektor maka Persamaan (4.36) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} &= \sigma\{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u}\} \\ &= \sigma\{(\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{B}\| \cos \theta_{\mathbf{uB}}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{u}\} \end{aligned} \quad (4.37)$$

karena \mathbf{B} adalah total medan magnet yang merupakan jumlahan dari medan magnet yang teraplikasikan yaitu B_0 dengan medan magnet yang terinduksi yaitu \mathbf{b} , atau dapat dituliskan secara matematis yaitu

$$\mathbf{B} = B_0 + \mathbf{b}$$

Oleh karena bilangan Reynold magnetiknya diasumsikan kecil maka induksi magnet \mathbf{b} dapat dihilangkan, sehingga medan magnet \mathbf{B} dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{B} = B_0 \quad (4.38)$$

dengan $\theta_{\mathbf{uB}} = \pi/2$, maka gaya Lorentz pada Persamaan (4.37) dapat dituliskan

sebagai

$$\frac{\mathbf{F}_{mag}}{\delta x \delta y \delta z} = -\sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (4.39)$$

Gaya apung dapat dituliskan sebagai $\mathbf{F}_{buo} = \rho \mathbf{g} \delta x \delta y \delta z$. Sedangkan untuk tekanan p pada Persamaan (4.32) dapat dituliskan sebagai $p = p_d + p_h$ dengan p_h merupakan tekanan hidrostatik dan p_d tekanan dinamik. Bentuk gradien tekanan yang disebabkan oleh tekanan hidrostatik dapat dituliskan sebagai berikut

$$\nabla p_h = \rho_\infty \mathbf{g} \quad (4.40)$$

yang mana ρ_∞ adalah massa jenis fluida diluar area lapisan batas. Selanjutnya bentuk $-\nabla p$ pada Persamaan (4.32) dapat dituliskan sebagai berikut

$$-\nabla p_d - \nabla p_h = -\nabla p_d - \rho_\infty \mathbf{g} \quad (4.41)$$

selanjutnya p_d dituliskan tanpa subskrip 'd'. Dengan menyubstitusikan Persamaan (4.32), (4.41) dan Persamaan (4.39) serta \mathbf{F}_{buo} pada Persamaan (4.24) didapatkan persamaan momentum sebagai berikut

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \sigma B_0^2 \mathbf{u} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} \quad (4.42)$$

dengan $\mathbf{g} = (g_x, g_y, 0)$.

4.1.3 Persamaan Energi

Selain persamaan kontinuitas dan persamaan momentum, pada penelitian ini juga digunakan persamaan energi. Menggunakan persamaan energi karena adanya temperatur yang berbeda dari aliran fluida sehingga menimbulkan adanya perpindahan energi yang berasal dari kalor antara media dengan fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum I Termodinamika mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Hukum pertama Termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi total yang tersimpan dari suatu sistem sama dengan laju netto pertambahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah dengan laju netto pertambahan dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left(\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out} \right)_{sys} + \left(\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out} \right)_{sys}$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \left(\dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{sys} \quad (4.43)$$

Energi total yang tersimpan per satuan massa dari setiap partikel di dalam sistem (e), dihubungkan dengan energi dalam per satuan massa (\tilde{u}), energi kinetik per satuan massa ($\frac{V^2}{2}$), dan energi potensial per satuan massa (gz), diperoleh persamaan

$$e = \tilde{u} + \frac{V^2}{2} + gz \quad (4.44)$$

karena volume kendali untuk hukum pertama termodinamika berimpit dengan sebuah sistem, maka diperoleh persamaan menurut Teorema Transport Reynolds yaitu

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA \quad (4.45)$$

Dengan menyubstitusikan Persamaan (4.45) dengan (4.43) didapatkan bentuk volume kendali untuk hukum I Termodinamika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA = \left(\dot{Q}_{innetto} + \dot{W}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.46)$$

Karena pada penelitian ini benda dianggap diam maka tidak terjadi usaha pada sistem, maka $\dot{W} = 0$, sehingga Persamaan (4.46) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} e \rho (\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dA = \left(\dot{Q}_{innetto} \right)_{cv} \quad (4.47)$$

atau dalam bentuk persamaan volume kendali yaitu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} e \rho dV + \int_{cs} \nabla \cdot (e \rho \mathbf{u}) dV = \int_{cv} \nabla \cdot (c \nabla T) dV + \int_{cv} \dot{q} dV \quad (4.48)$$

Dengan $\nabla \cdot (c \nabla T)$ adalah konduksi panas yang terjadi pada volume kendali dan \dot{q} adalah sumber panas (*heat generation*). Karena pada penelitian ini tidak terdapat sumber panas pada volume kendali maka $\dot{q} = 0$, sehingga Persamaan (4.48) dapat ditulis

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot (c \nabla T) \quad (4.49)$$

berdasarkan sifat divergensi diketahui bahwa (Sen, 1996):

$$\nabla \cdot (e\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (4.50)$$

dengan mensubstitusikan persamaan kontinuitas pada Persamaan (4.50) didapatkan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot e\mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} \cdot (e\mathbf{u}) + 0 \\ &= \mathbf{u} \cdot (\nabla e) \end{aligned}$$

maka Persamaan (4.46) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (c\nabla T) \quad (4.51)$$

Menurut Lienhard(2002) pengaruh dari tekanan dan perubahan kerapatan dapat diabaikan karena dalam sistem tekanan konstan (tetap), sehingga perubahan dari energi dapat didekati dengan perubahan entalpi sebagai berikut

$$\partial e = \partial h - \partial \left(\frac{P}{\rho} \right) \approx \partial h \quad (4.52)$$

dengan menyubstitusikan $\partial h \approx C_p \partial T$ ke Persamaan (4.51), sehingga didapat:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (c\nabla T) \quad (4.53)$$

dengan

$$\nabla \cdot (T\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla T) + T \cdot (\nabla \mathbf{u})$$

sesuai dengan persamaan kontinuitas, maka

$$\nabla \cdot (T\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla T) \quad (4.54)$$

kemudian disubstitusikan Persamaan (4.54) ke Persamaan (4.53), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (c\nabla T) \quad (4.55)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \cdot (\nabla T) &= (\hat{i}u + \hat{j}v) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 &= \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
 \nabla \cdot (c \nabla T) &= c \nabla \cdot (\nabla T) \\
 &= c \left[\left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\
 &= c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

Maka Persamaan (4.55) menjadi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.56)$$

4.2 Penurunan Persamaan Pembangun Model

Persamaan pembangun model yang meliputi persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi telah dibahas pada sub bab sebelumnya. Berikut ini persamaan pembangun yang digunakan pada aliran fluida yang bersifat *unsteady* dan *incompressible*:

a. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0
 \end{aligned} \quad (4.57)$$

b. Persamaan Momentum

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \sigma B_0^2 \mathbf{u} + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} \quad (4.58)$$

c. Persamaan Energi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.59)$$

Tanda '-' menandakan bahwa variabel-variabelnya merupakan variabel yang berdimensi.

4.2.1 Persamaan Momentum

Aliran fluida kental yang melewati permukaan sebuah silinder eliptik yang diilustrasikan pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa aliran bergerak ke arah sumbu- x dan ke arah sumbu- y , sehingga dapat dikonstruksi persamaan momentum ke arah sumbu- x dan sumbu- y . Pada Persamaan momentum (4.58) terdapat bentuk komponen dalam notasi vektor, jika dijabarkan akan didapatkan sebagai berikut:

a. Ruas kiri dari Persamaan (4.58) yang berupa $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\hat{j}\end{aligned}\quad (4.60)$$

b. Ruas kiri dari Persamaan (4.58) yang berupa $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ adalah

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left((\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \bar{u}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\hat{i} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\hat{j} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\hat{j}\end{aligned}\quad (4.61)$$

c. Ruas kanan dari Persamaan (4.58) yang berupa ∇p adalah

$$\nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) p = \frac{\partial p}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial \bar{y}}\hat{j}\quad (4.62)$$

d. Ruas kanan dari Persamaan (4.58) yang berupa $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ adalah

$$\begin{aligned}\mu \nabla^2 \mathbf{u} &= \mu \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\hat{j} \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}\bar{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}\hat{j} + 2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}\bar{y}}\hat{i} + 2\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}\bar{y}}\hat{j} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\hat{j} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \hat{j}\end{aligned}\quad (4.63)$$

e. Ruas kanan dari Persamaan (4.58) yang berupa $\sigma B_0^2 \mathbf{u}$ adalah

$$\sigma B_0^2 \mathbf{u} = \sigma B_0^2 (\bar{u}\hat{i} + \bar{v}\hat{j}) = \sigma B_0^2 \bar{u}\hat{i} + \sigma B_0^2 \bar{v}\hat{j}\quad (4.64)$$

Dengan mengelompokkan vektor \hat{i} untuk sumbu- x dan \hat{j} untuk sumbu- y , didapatkan persamaan momentum sumbu- x yaitu

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{x}} \quad (4.65)$$

dan untuk persamaan momentum di sumbu- y yaitu

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} + (\rho - \rho_\infty) g_{\bar{y}} \quad (4.66)$$

Sesuai dengan pendekatan Boussinesq yaitu semua variabel yang berpengaruh dalam Persamaan momentum (4.65) dan (4.66) diabaikan, kecuali kerapatan. Pendekatan Boussinesq ini diterapkan pada Persamaan (4.65) dan (4.66) untuk mendekati perbedaan kerapatan yang menyebabkan adanya aliran sebagai akibat dari interaksi antara gaya gravitasi dan tekanan hidrostatik seperti pengaruh temperatur. Menurut Leal (1992), diasumsikan bahwa nilai maksimum $(\bar{T} - T_\infty)$ kecil, sehingga berdasarkan definisi pendekatan Deret Taylor yaitu

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) + O(\bar{T} - T_\infty)^2 \quad (4.67)$$

dengan menghilangkan bagian yang berorder tinggi, maka Persamaan (4.67) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\rho_\infty}{\rho} &= 1 + \beta(\bar{T} - T_\infty) \\ \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} &= \beta(\bar{T} - T_\infty) \end{aligned} \quad (4.68)$$

dengan β adalah koefisien ekspansi panas yang dinyatakan dengan

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{T}} \right)_p \quad (4.69)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (4.68) pada Persamaan (4.65), maka didapatkan persamaan momentum sumbu- x :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} \quad (4.70)$$

dan persamaan momentum sumbu- y yaitu

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = - \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \quad (4.71)$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} \bar{t} < 0 & : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_{\infty} \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} \geq 0 & : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{T} = T_w \text{ pada saat } \bar{y} = 0 \\ & \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{T} = T_{\infty} \text{ saat } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.2.2 Transformasi Variabel Takberdimensi

Variabel takberdimensi digunakan untuk mempermudah proses komputasi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan sebagai berikut (Ali, 2010):

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a} \\ u &= \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_{\infty}} \\ t &= \frac{U_{\infty} \bar{t}}{a} \\ p &= \frac{\bar{p}}{\rho U_{\infty}^2}, T = \frac{\bar{T} - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

dengan $Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu}$, dan ν adalah viskositas kinematik yang dapat dituliskan sebagai $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Selanjutnya dilakukan substitusi variabel-variabel tak berdimensi (4.73) pada Persamaan (4.57), (4.70), (4.71) dan (4.59) sehingga didapatkan

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.74)$$

b. Persamaan Momentum sumbu-x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \alpha T \sin A \quad (4.75)$$

c. Persamaan Momentum sumbu-y

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{M}{Re} v - \frac{\alpha}{Re^{1/2}} T \cos A \quad (4.76)$$

d. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.77)$$

dengan M , α , Gr , dan Pr adalah parameter tak berdimensi. Parameter-parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \quad (\text{Parameter Magnetik})$$

$$\alpha = \frac{Gr}{Re^2} \quad (\text{Parameter Konveksi})$$

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2} \quad (\text{Bilangan Grashof})$$

$$Pr = \frac{\nu \rho C_p}{c} \quad (\text{Bilangan Prandtl})$$

Berdasarkan variabel tak berdimensi pada (4.73) maka, kondisi batas pada (4.72) menjadi

$$t < 0 : u = v = 0, T = 0 \text{ untuk setiap } x, y$$

$$t \geq 0 : u = v = 0, T = 1 \text{ pada saat } y = 0$$

$$u = u_e(x), T = 0 \text{ saat } y \rightarrow \infty \quad (4.78)$$

4.2.3 Pendekatan Lapisan Batas

Dengan menggunakan pendekatan lapisan batas yang mana $Re \rightarrow \infty$ sehingga $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$, maka diperoleh

a. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.79)$$

b. Persamaan Momentum sumbu- x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \alpha T \sin A \quad (4.80)$$

c. Persamaan Momentum sumbu- y

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.81)$$

d. Persamaan Energi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.82)$$

Pada Persamaan (4.81) dapat dilihat bahwa tekanan fluida, p tidak bergantung terhadap variabel y . Dikarenakan pada penelitian ini menggunakan penampang aliran 2 dimensi, maka dapat disimpulkan bahwa tekanan aliran hanya bergantung

pada variabel x . Oleh karena itu, hanya satu persamaan momentum yang digunakan dalam membangun model pada penelitian ini yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \alpha T \sin A \quad (4.83)$$

sehingga persamaan momentum di luar lapisan batas yaitu

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} - Mu_e + \alpha T \sin A \quad (4.84)$$

dengan menggunakan kecepatan aliran bebas $u_e = \sin x$ (Ingham dan Merkin, 1981), sehingga didapatkan bahwa

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 ; \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0 \quad (4.85)$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (4.85) pada (4.84) didapatkan

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - Mu_e + \alpha T \sin A \quad (4.86)$$

dan pada saat $T = 0$ maka

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + Mu_e \quad (4.87)$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (4.87) pada Persamaan (4.83) didapatkan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M(u - u_e) + \alpha T \sin A \quad (4.88)$$

4.2.4 Fungsi Arus atau Fungsi Alir (*Stream Function*)

Pada penelitian ini menggunakan penampang dua dimensi atau hanya terdapat dua komponen kecepatan yaitu u dan v yang alirannya berada pada bidang x dan y . Untuk menghubungkan dua fungsi kecepatan tersebut maka dikenalkan sebuah fungsi arus atau fungsi alir. Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi hanya dalam satu variabel. Fungsi alir ini dinyatakan sebagai berikut

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.89)$$

a. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(- \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (4.90)$$

b. Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M(u - u_e) + \alpha T \sin A \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) \\ &+ \alpha T \sin A\end{aligned}\quad (4.91)$$

c. Persamaan Energi

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (4.92)$$

Kondisi batas pada (5.22) dapat dituliskan dalam bentuk fungsi alir yaitu

$$\begin{aligned}t < 0 &: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = T = 0 \text{ untuk semua } x, y \\ t \geq 0 &: \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, T = 1 \text{ pada saat } y = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u_e(x), T = 0 \text{ pada saat } y \rightarrow \infty\end{aligned}\quad (4.93)$$

4.2.5 Persamaan Similaritas

Persamaan kontinuitas pada Persamaan (4.90) dapat dihilangkan dari hasil fungsi alir sehingga persamaan pembangun hanya ada 2 yaitu persamaan momentum dan energi. Persamaan untuk variabel similaritas untuk waktu kecil ($t \leq t^*$) dengan t^* sebarang nilai yaitu

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \quad T = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}} \quad (4.94)$$

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \\ + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) - \alpha t s \frac{\sin A}{u_e} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Persamaan energi:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t u_e \left(- \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) + \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.96)$$

Variabel similaritas untuk waktu besar ($t \geq t^*$) yaitu

$$\psi = u_e(x) F(x, Y, t) \quad T = S(x, Y, t) \quad Y = y \quad (4.97)$$

dengan mensubstitusikan variabel similaritas (4.97) pada persamaan momentum (4.91) yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \\ + u_e \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) - \alpha S \frac{\sin A}{u_e} \end{aligned} \quad (4.98)$$

dan persamaan energi untuk waktu besar yaitu

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} F \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} u_e \left(- \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial Y} \right) + \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.99)$$

Pada silinder eliptik terdapat dua macam bentuk yaitu (*blunt orientation*) atau sumbu mayornya horizontal dan (*slender orientation*) yaitu sumbu mayornya vertikal yang mana x dan $\sin A$ untuk bentuk *slender orientation* diberikan sebagai berikut:

$$x = \int_0^\gamma (1 - e^2 \cos^2 z)^{1/2} dz, \quad \sin A = \frac{\sin \gamma}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{1/2}}$$

dengan a adalah sumbu vertikal, b adalah sumbu horizontal dan $e^2 = 1 - (b/a)^2$, sehingga untuk bentuk *slender orientation* dapat dituliskan $\omega = (a/b)^2$ (Ahmad, 2008). Pada penelitian ini diteliti pada bagian titik stagnasi yaitu ($x \approx 0$), dengan demikian maka nilai $u_e(x) = 0$ dan $\frac{\partial u_e(x)}{\partial x} = 1$, $\frac{\sin A}{u_e} \rightarrow \omega$ sehingga persamaan

momentum dan energi untuk waktu kecil adalah

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} - \alpha t s \omega \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.101)$$

dengan kondisi batas

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk sebarang } \eta \text{ dan } x$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty \quad (4.102)$$

dan untuk persamaan momentum dan energi untuk waktu besar yaitu

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} - \alpha S \omega \quad (4.103)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.104)$$

dengan kondisi batas

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ pada saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty \quad (4.105)$$

Pada penelitian ini konveksi yang digunakan adalah konveksi paksa, sehingga pada parameter konveksi $\alpha = 0$, sehingga model aliran konveksi paksa yang mengandung medan magnet yang melewati silinder eliptik pada fluida kental adalah

a. Pada saat *small time* ($t < t^*$) dengan t^* adalah waktu sebarang yang diinginkan

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + Mt \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr} t f \frac{\partial s}{\partial \eta} = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.107)$$

dengan kondisi batas

$$t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = s = 0 \text{ untuk sebarang } \eta \text{ dan } x$$

$$t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, s = 1 \text{ pada saat } \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, s = 0 \text{ saat } \eta \rightarrow \infty \quad (4.108)$$

b. Pada saat *large time* ($t > t^*$)

$$\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \left(1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right) + M \left(1 - \frac{\partial F}{\partial Y}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} + \text{Pr} F \frac{\partial S}{\partial Y} = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.110)$$

dengan kondisi batas

$$F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, S = 1 \text{ pada saat } Y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 1, S = 0 \text{ pada saat } Y \rightarrow \infty \quad (4.111)$$

Bentuk Persamaan (4.106) dan (4.107) dapat dituliskan sebagai berikut

$$f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + M t(1 - f') = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (4.112)$$

$$s'' + \text{Pr} \frac{\eta}{2} s' + \text{Pr} t f s' = \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (4.113)$$

dimana tanda (') menunjukkan turunan partial terhadap η atau $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, sedangkan untuk bentuk persamaan waktu besar (4.103) dan (4.104) yaitu

$$F''' + (1 - (F')^2 + F F'') + M(1 - F') = \frac{\partial F'}{\partial t} \quad (4.114)$$

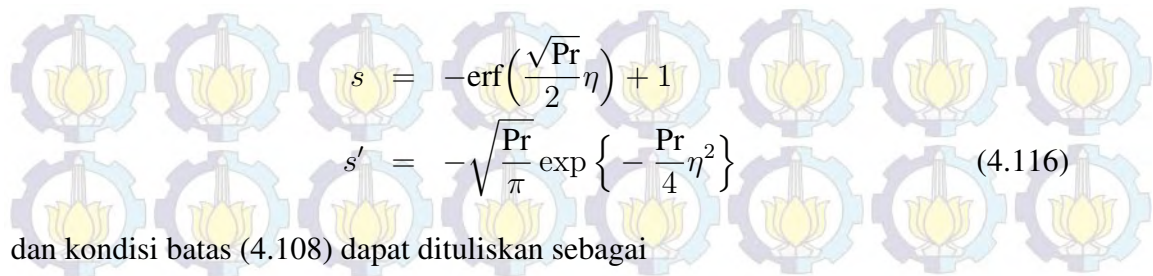
$$S'' + \text{Pr} f S' = \text{Pr} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.115)$$

Kondisi awal untuk fungsi f, f', f'' dan s, s' didapatkan dengan menyubstitusikan $t = 0$ pada Persamaan (4.112) dan (4.113) yang kemudian diselesaikan dengan menggunakan kondisi batas (4.108) diperoleh

$$f = \eta \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - 1 \right\}$$

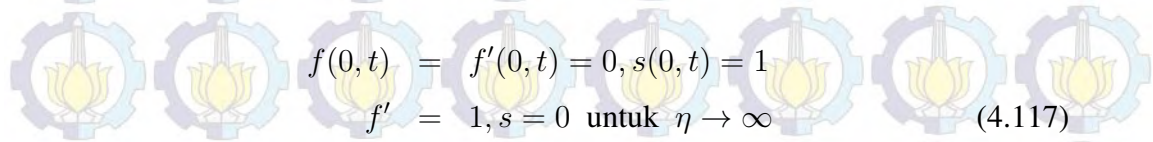
$$f' = \text{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$



$$\begin{aligned}
 s &= -\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{Pr}}}{2}\eta\right) + 1 \\
 s' &= -\sqrt{\frac{\operatorname{Pr}}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\operatorname{Pr}}{4}\eta^2\right\}
 \end{aligned}
 \tag{4.116}$$

dan kondisi batas (4.108) dapat dituliskan sebagai



$$\begin{aligned}
 f(0, t) &= f'(0, t) = 0, s(0, t) = 1 \\
 f' &= 1, s = 0 \text{ untuk } \eta \rightarrow \infty
 \end{aligned}
 \tag{4.117}$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini menjelaskan penyelesaian model matematika aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati silinder eliptik secara numerik dengan menggunakan skema Keller-Box. Penyelesaian ini diawali dengan mengimplementasikan metode Keller-Box dengan cara mendiskritisasi model aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati silinder eliptik yang telah didapatkan pada bab sebelumnya, kemudian dilakukan linierisasi Metode Newton, yang selanjutnya diselesaikan dengan teknik Eliminasi Matrik Blok Tridiagonal dan disimulasikan dengan program. Program simulasi yang telah dibuat menghasilkan hasil berupa grafik yang selanjutnya dianalisa.

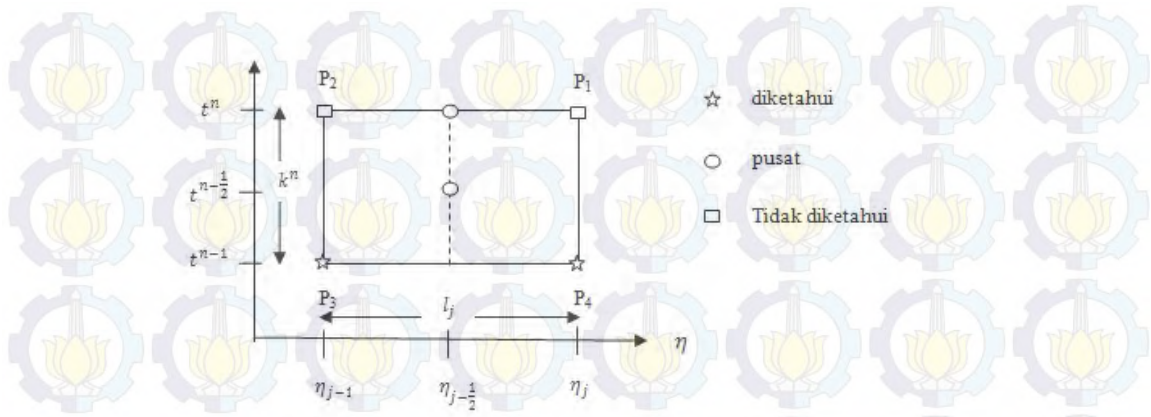
5.1 Penyelesaian Numerik Model

Setelah didapatkan model matematika dari aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD melewati silinder eliptik ini, hal yang dilakukan selanjutnya adalah penyelesaian secara numerik. Pada penelitian ini model persamaan yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Metode ini sesuai dan efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu:

1. Persamaan model sistem (4.106) dan (4.107) dibentuk menjadi persamaan orde pertama
2. Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan beda hingga pusat
3. Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

5.1.1 Diskritisasi Model

Persamaan (4.112) dan (4.113) merupakan persamaan dengan orde tinggi. Pada penyelesaian numerik menggunakan metode Keller-Box haruslah persamaan dalam bentuk orde pertama, maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut



Gambar 5.1: Stensil Beda Hingga

$$f' = u \quad (5.1)$$

$$u' = v \quad (5.2)$$

$$s' = q \quad (5.3)$$

$$v' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - u^2 + fv) + Mt(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$q' + \frac{\text{Pr}}{2}\eta q + \text{Pr}t f q = \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t} \quad (5.5)$$

Setelah dilakukan pemisalan fungsi selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar 5.1, untuk Persamaan (5.1)-(5.3) menggunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$ pada ruas P_1P_2 dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada persamaan (5.4) dan (5.5) digunakan titik tengah $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$ pada segiempat $P_1P_2P_3P_4$ sehingga didapatkan sebagai berikut

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{l_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.6)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{l_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.7)$$

$$\frac{(s_j^n - s_{j-1}^n)}{l_j} = q_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.8)$$

$$\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}v_{j-\frac{1}{2}}^n) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + Mt^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} \\
& - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) \\
& - Mt^{n-\frac{1}{2}}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \text{Prt}^n (fq)_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{\text{Prt}^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& = - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \text{Prt}^{n-1} (fq)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& - 2 \frac{\text{Prt}^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

dengan l_j adalah step size untuk η , sedangkan k^n step size dari waktu, dimana

$$\begin{aligned}
(\cdot)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} \left[(\cdot)_j^n + (\cdot)_{j-1}^n \right] \\
(\cdot)_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left[(\cdot)_j^n + (\cdot)_j^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

5.1.2 Linierisasi Model

Setelah didapatkan hasil diskritisasi model, selanjutnya dilakukan linierisasi model pada Persamaan (5.6)-(5.10) dengan menggunakan metode Newton. Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f_j^{(i+1)} &= f_j^{(i)} + \delta f_j^{(i)} \\
u_j^{(i+1)} &= u_j^{(i)} + \delta u_j^{(i)} \\
v_j^{(i+1)} &= v_j^{(i)} + \delta v_j^{(i)} \\
s_j^{(i+1)} &= s_j^{(i)} + \delta s_j^{(i)} \\
q_j^{(i+1)} &= q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi (5.11) pada sistem Persamaan (5.6)-(5.10), secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada $(\delta f_j^{(i)}, \delta u_j^{(i)}, \delta v_j^{(i)}, \delta s_j^{(i)}, \delta q_j^{(i)})$ didapatkan

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.12)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.13)$$

$$(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta q_j + \delta q_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} (a_1)_j \delta f_j + (a_2)_j \delta f_{j-1} + (a_3)_j \delta u_j + (a_4)_j \delta u_{j-1} + (a_5)_j \delta v_j + (a_6)_j \delta v_{j-1} \\ = (r_4)_j \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$(b_1)_j \delta q_j + (b_2)_j \delta q_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta s_j + (b_6)_j \delta s_{j-1} = (r_5)_j \quad (5.16)$$

dengan

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$(r_2)_j = -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$(r_3)_j = -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n)$$

$$\begin{aligned} (r_4)_j = & -\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} - t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) \\ & - Mt^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} \\ & - t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) - Mt^{n-\frac{1}{2}} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_5)_j = & -\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n - \text{Pr} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n) + 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\ & - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \text{Pr} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned}$$

$$(a_1)_j = \frac{t^n}{2} (v_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$(a_2)_j = (a_1)_j$$

$$(a_3)_j = -t^n u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{Mt^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}$$

$$(a_4)_j = (a_3)_j$$

$$(a_5)_j = \frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{t^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$(a_6)_j = -\frac{1}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \frac{t^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$\begin{aligned}
(b_1)_j &= \frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}} \frac{f_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(b_2)_j &= -\frac{1}{l_j} + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{4} + \text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}} \frac{f_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(b_3)_j &= \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} \\
(b_4)_j &= (b_3)_j \\
(b_5)_j &= \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_6)_j &= (b_5)_j
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas pada (4.102) maka dapat dinyatakan bahwa $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta s_N = 0$.

5.1.3 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (5.12)-(5.16) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Na, 1979). Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller-Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.12)-(5.16) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat $j = 1, j = N - 1$, dan $j = N$.

Keadaan 1 Saat $j = 1$, maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$\begin{aligned}
(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) &= (r_1)_1 \\
(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) &= (r_2)_1 \\
(\delta s_1 - \delta s_0) - \frac{l_1}{2}(\delta q_1 + \delta q_0) &= (r_3)_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_1)_1 \delta f_1 + (a_2)_1 \delta f_0 + (a_3)_1 \delta u_1 + (a_4)_1 \delta u_0 + (a_5)_1 \delta v_1 + (a_6)_1 \delta v_0 \\
= (r_4)_1
\end{aligned}$$

$$(b_1)_1 \delta q_1 + (b_2)_1 \delta q_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 + (b_5)_1 \delta s_1 + (b_6)_1 \delta s_0 = (r_5)_1$$

Berdasarkan kondisi batas $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta s_0 = 0$ maka sistem diatas

dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_6)_1 & 0 & (a_1)_1 & (a_5)_1 & 0 \\ 0 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & 0 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta q_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta s_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk $j = 1$ $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$.

Keadaan 2 Saat nilai $j = N - 1$ maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} + \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} + \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta s_{N-1} - \delta s_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta q_{N-1} + \delta q_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$(a_1)_{N-1}\delta f_{N-1} + (a_2)_{N-1}\delta f_{N-2} + (a_3)_{N-1}\delta u_{N-1} + (a_4)_{N-1}\delta u_{N-2} + (a_5)_{N-1}\delta v_{N-1} + (a_6)_{N-1}\delta v_{N-2} = (r_4)_{N-1}$$

$$(b_1)_{N-1}\delta q_{N-1} + (b_2)_{N-1}\delta q_{N-2} + (b_3)_{N-1}\delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1}\delta f_{N-2} + (b_5)_{N-1}\delta s_{N-1} + (b_6)_{N-1}\delta s_{N-2} = (r_5)_{N-1}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_{N-1} & (a_6)_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & 0 & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-2} \\ \delta q_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_4)_{N-1} & 0 & (a_1)_{N-1} & (a_5)_{N-1} & 0 \\ 0 & (b_6)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & 0 & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta s_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_3)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (b_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Secara sederhana bentuk matriks diatas dapat dinyatakan sebagai

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

dimana bentuk ini berlaku untuk setiap $j = 2, 3, \dots, N-1$.

Kedadaan 3 Saat nilai $j = N$ maka Persamaan (5.12)-(5.16) menjadi

$$(\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N + \delta u_{N-1}) = (r_1)_N$$

$$(\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N + \delta v_{N-1}) = (r_2)_N$$

$$(\delta s_N - \delta s_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta q_N + \delta q_{N-1}) = (r_3)_N$$

$$\begin{aligned}
& (a_1)_N \delta f_N + (a_2)_N \delta f_{N-1} + (a_3)_N \delta u_N + (a_4)_N \delta u_{N-1} \\
& + (a_5)_N \delta v_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} = (r_4)_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_1)_N \delta q_N + (b_2)_N \delta q_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} \\
& + (b_5)_N \delta s_N + (b_6)_N \delta s_{N-1} = (r_5)_N
\end{aligned}$$

dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_2)_N & (a_6)_N & 0 \\ 0 & 0 & (b_4)_N & 0 & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta q_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_4)_N & 0 & (a_1)_N & (a_5)_N & 0 \\ 0 & (b_6)_N & (b_3)_N & 0 & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta s_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix}$$

secara sederhana dapat dinyatakan sebagai $[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$ untuk $j = N$.

Dengan demikian secara keseluruhan untuk $j = 1, 2, 3, \dots, N$ secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned} j = 1 & : [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1] \\ j = 2 & : [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] = [r_2] \\ j = 3 & : [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] = [r_3] \\ & \vdots \\ j = N-1 & : [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] = [r_{N-1}] \\ j = N & : [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] = [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \quad (5.17)$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (5.17), dapat dilihat bahwa matriks \mathbf{A} adalah matriks tridiagonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada tiga diagonal

utamanya. Persamaan (5.17) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok dengan mengasumsikan bahwa matriks A adalah matriks *non singular* sehingga dapat difaktorkan sebagai

$$A = LU \quad (5.18)$$

dimana

$$L = \begin{pmatrix} [\alpha_1] \\ [B_2] & [\alpha_1] \\ & \ddots \\ & & [\alpha_{N-1}] \\ & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix} \quad \text{dan}$$

$$U = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] \\ & [I] & [\Gamma_1] \\ & & \ddots \\ & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan $[I]$ adalah matriks identitas yang berukuran 5×5 dan $[\alpha_j], [\Gamma_j]$ merupakan matriks ukuran 5×5 dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned}$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (5.18) pada Persamaan (5.17) maka didapatkan persamaan

$$LU\delta = r \quad (5.19)$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$U\delta = W \quad (5.20)$$

sehingga Persamaan (5.19) dapat dituliskan sebagai

$$LW = r \quad (5.21)$$

dimana

$$W = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

dan $[W_j]$ adalah matriks berukuran 5×1 dengan elemen-elemennya didapatkan dari Persamaan (5.21) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_{j-1}], \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks W , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari δ pada Persamaan (5.20) dengan menggunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [W_j] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{aligned}$$

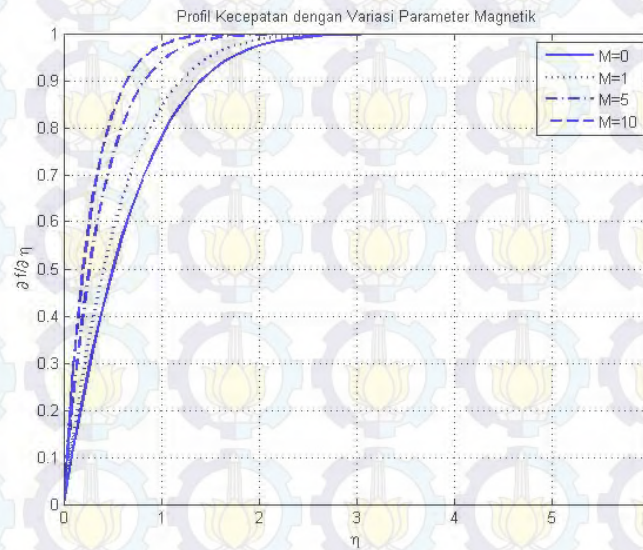
dengan didupatkannya nilai δ , maka Persamaan (5.12)-(5.16) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.11) dengan melakukan iterasi sebanyak sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan $v(0, t)$ dan iterasi berhenti saat didapatkan $|\delta v(0, t)| < \varepsilon$, dimana nilai dari ε sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan nilai $\varepsilon = 10^{-5}$ (Mohammad, 2014).

5.2 Hasil Simulasi Numerik

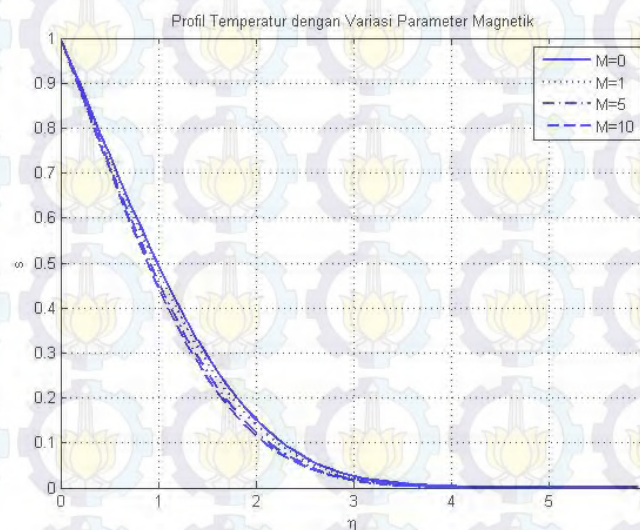
Setelah dilakukan tahapan penyelesaian numerik, dilakukan simulasi dengan menggunakan Matlab. Pada simulasi ini inputan berupa beberapa parameter dan simulasi ini dilakukan dengan menggunakan beberapa kali percobaan parameter. Akan tetapi pada bab ini hanya beberapa yang ditampilkan yang dapat mewakili dari percobaan simulasi yang telah dilakukan. Simulasi ini menggunakan partisi η sebanyak 60 dengan $\Delta\eta = l_j = 0.1$ dan partisi t sebanyak 33 dengan $\Delta t = k^n =$

0.05. Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, didapatkan hubungan antara parameter magnetik (M), bilangan Prandtl (Pr), parameter konveksi (α), sumbu vertikal (a) dan sumbu horisontal silinder eliptik (b) dengan profil kecepatan (f') dan profil temperatur (s). Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut.

5.2.1 Pengaruh Parameter Magnetik



Gambar 5.2: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Magnetik (M)



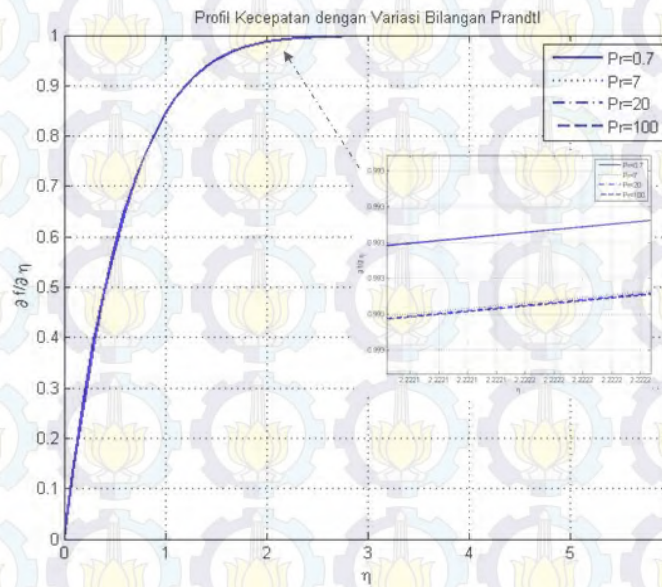
Gambar 5.3: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Magnetik (M)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan dan temperatur fluida kental. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter magnetik yaitu $M = 0, 1, 5, 10$ dengan $\alpha = 0$, $Pr = 0.7$, $a = 4$ dan $b = 2$ dengan $t = 1.65$, pemilihan variasi M ini dapat juga dilakukan untuk $0 \leq M \leq 100$ yang mana maksud dari nilai $M = 0$ adalah tidak adanya pengaruh medan magnet pada aliran. Pada Gambar 5.2 didapatkan bahwa kecepatan fluida mengalami kenaikan seiring dengan bertambahnya parameter magnetik. Nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai $f' = 0$ sampai $f' \approx 1$. Berdasarkan hasil grafik pada Gambar 5.2 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka semakin besar pula kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar Gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida kental, hal ini dapat ditunjukkan secara matematis oleh $M = \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty}$ yang berarti bahwa $M \sim B_0$. Dengan meningkatnya gaya Lorentz mengakibatkan gerakan muatan-muatan listrik yang ada dalam medan magnet menjadi meningkat dan bertambah pula momentum dari fluida ini, sehingga fluida kental pun akan bergerak lebih cepat.

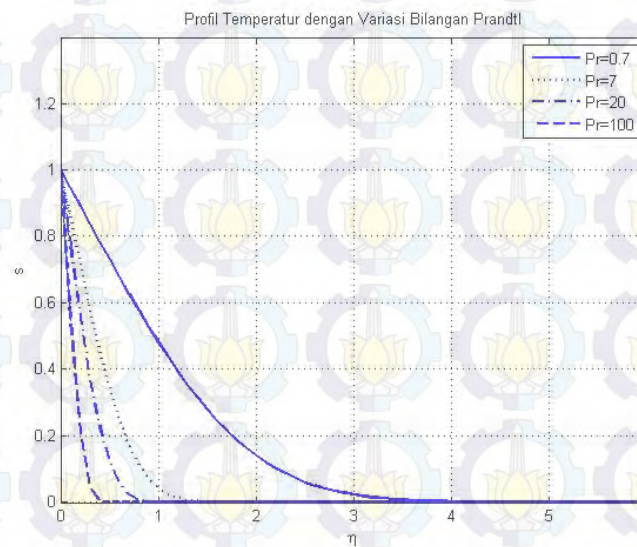
Pada Gambar 5.3 yaitu temperatur mengalami penurunan mulai dari $s = 1$ sampai $s \approx 0$. Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.3 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter magnetik temperatur yang dihasilkan semakin menurun. Hal ini dikarenakan gaya Lorentz yang disebabkan oleh adanya medan magnet yang melintang pada aliran membuat fluida ini semakin bertambah energi internalnya. Energi internal digunakan untuk partikel fluida bergerak melaju sesuai dengan *stream line*, sehingga temperatur fluida ini akan semakin berkurang seiring dengan bertambahnya medan magnet.

5.2.2 Pengaruh Bilangan Prandtl

Pada simulasi ini menggunakan beberapa variasi nilai bilangan Prandtl, yaitu 0.7, 7, 20, dan 100, dengan nilai $M = 1$, $a = 4$, dan $b = 2$ dengan $t = 1.65$, untuk bilangan Prandtl dapat dipilih nilainya yaitu $0.7 \leq Pr \leq 100$ yang mana $Pr = 0.7$ yang berarti gas dan $Pr = 7$ berarti air. Berdasarkan pada Gambar 5.4 didapatkan bahwa kecepatan fluida mengalami perubahan yang sangat kecil pada saat nilai $\alpha \approx 0$. Hal ini berarti pada saat parameter konveksi menunjukkan adanya konveksi paksa maka pengaruh bilangan Prandtl terhadap kecepatan fluida sangat kecil. Pada grafik Gambar 5.4 didapatkan kecepatan fluida semakin menurun dengan seiring meningkatnya bilangan Prandtl. Hal ini terjadi dikarenakan $Pr = \frac{\nu \rho C_p}{k}$ sehingga dapat dinyatakan bahwa $Pr \sim \rho$. Oleh karena itu saat bilangan Prandtl diperbesar maka densitas dari fluida juga akan besar. Hal ini dapat menyebabkan kecepatan



Gambar 5.4: Profil Kecepatan dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)



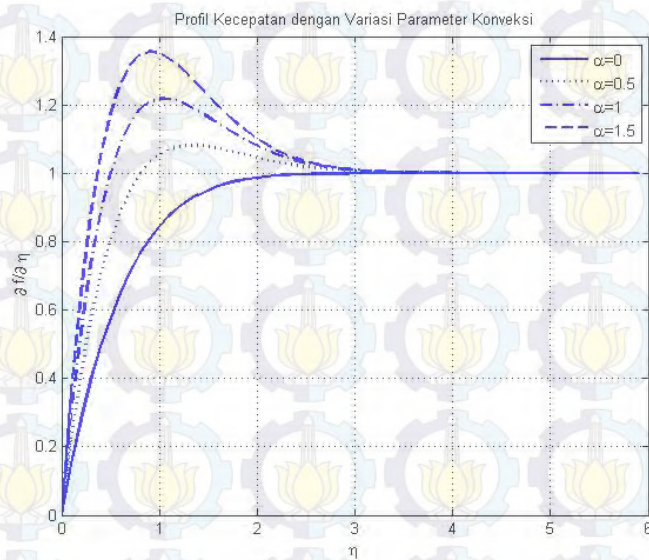
Gambar 5.5: Profil Temperatur dengan Variasi Bilangan Prandtl (Pr)

fluida semakin menurun.

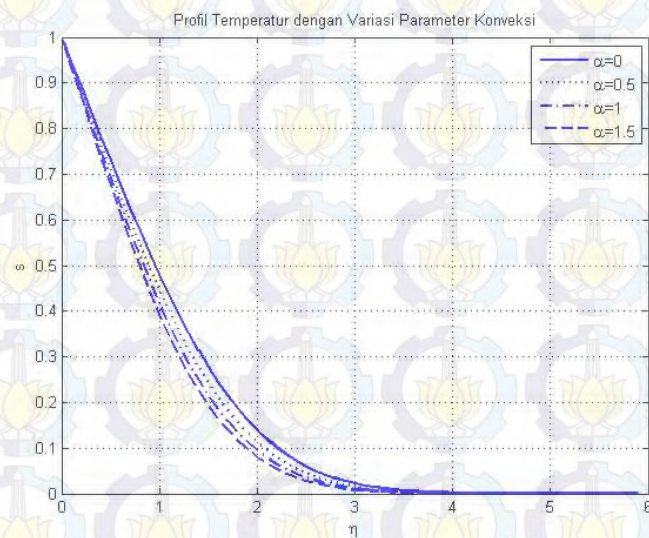
Pada Gambar 5.5 didapatkan bahwa semakin besar bilangan Prandtl yang digunakan maka semakin menurun temperatur fluida yang dihasilkan. Bilangan Prandtl merupakan rasio dari diffusivitas momentum dengan diffusivitas termal, dengan meningkatnya bilangan Prandtl maka konduktivitas termal akan turun dan

panas akan didifusikan dari permukaan benda lebih cepat dibanding fluidanya, hal inilah yang menyebabkan temperatur semakin menurun dengan meningkatnya bilangan Prandtl.

5.2.3 Pengaruh Variasi Parameter Konveksi



Gambar 5.6: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi (α)



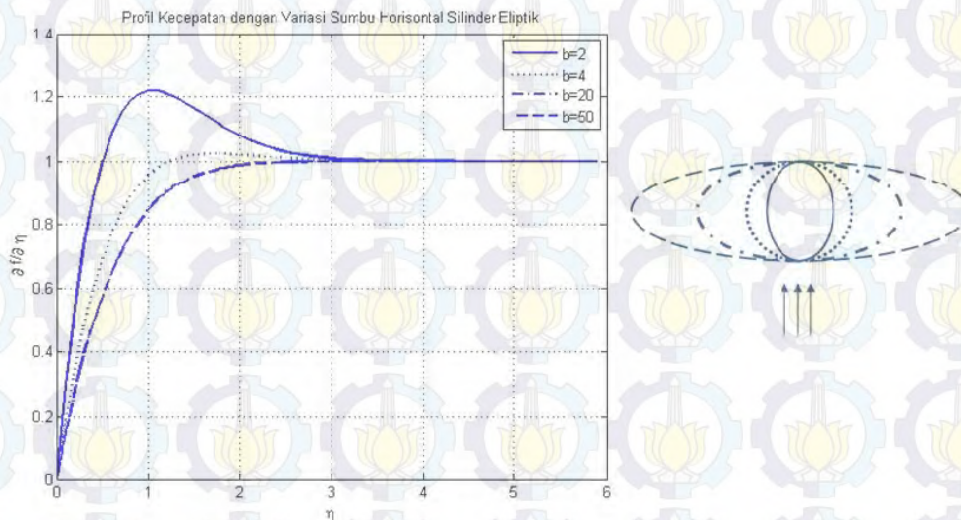
Gambar 5.7: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Konveksi (α)

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter konveksi

terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida dengan variasi nilainya yaitu $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5$ dengan menggunakan nilai $M = 1$, $Pr = 0.7$, $a = 4$, dan $b = 2$ adalah tetap, selain nilai α tersebut juga dapat digunakan nilai $-2 < \alpha < 10$ yang memiliki arti bahwa saat nilai $\alpha \neq 0$ merupakan terjadinya konveksi campuran dan saat $\alpha = 0$ merupakan konveksi paksa. Berdasarkan Gambar 5.6 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter konveksi maka semakin besar pula nilai kecepatan fluidanya. Hal ini terjadi karena dengan adanya peningkatan nilai parameter konveksi maka semakin meningkat pula gaya apung yang bekerja pada fluida sehingga kecepatan fluida akan meningkat.

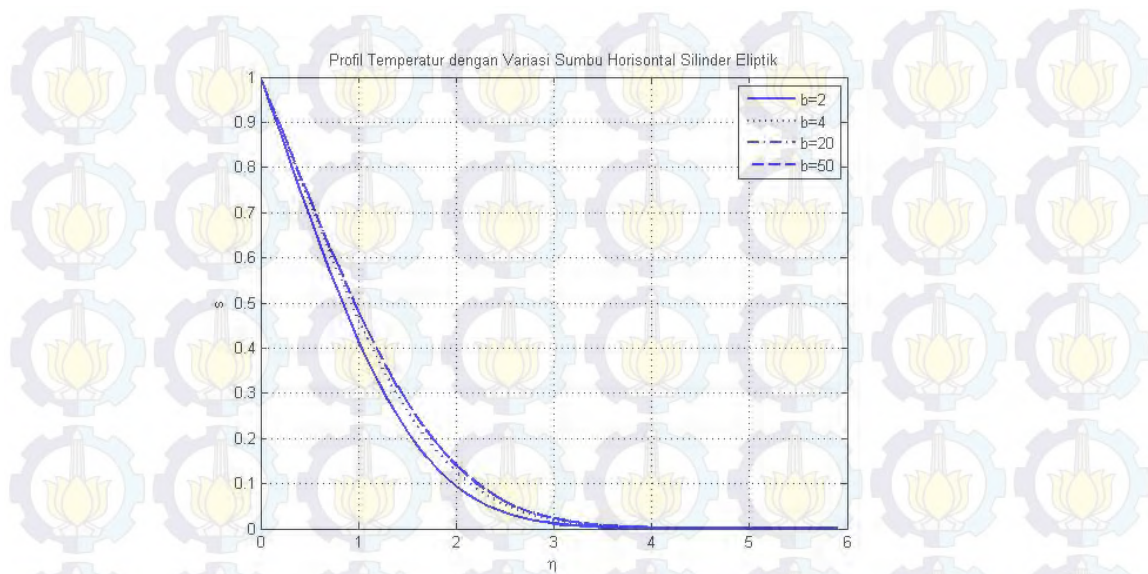
Pada Gambar 5.7 didapatkan bahwa temperatur fluida semakin menurun seiring dengan bertambahnya parameter konveksi. Temperatur fluida mengalami penurunan mulai dari $s = 1$ sampai $s = 0$. Diketahui bahwa dengan $\alpha = \frac{Gr}{Re^2}$ maka $\alpha \sim Gr$, sedangkan $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2}$ yang mana dapat dikatakan bahwa $\alpha \sim Gr \sim (T_w - T_\infty)$. Oleh karena itu, terjadinya penurunan temperatur ini dapat dikarenakan oleh adanya $(T_w - T_\infty)$ yang semakin besar. Dengan nilai temperatur dinding yang tetap maka temperatur fluida akan semakin kecil seiring dengan bertambahnya nilai α .

5.2.4 Pengaruh Variasi Sumbu Vertikal dan Horizontal Silinder Eliptik



Gambar 5.8: Profil Kecepatan dengan Variasi Nilai Sumbu Horizontal (b)

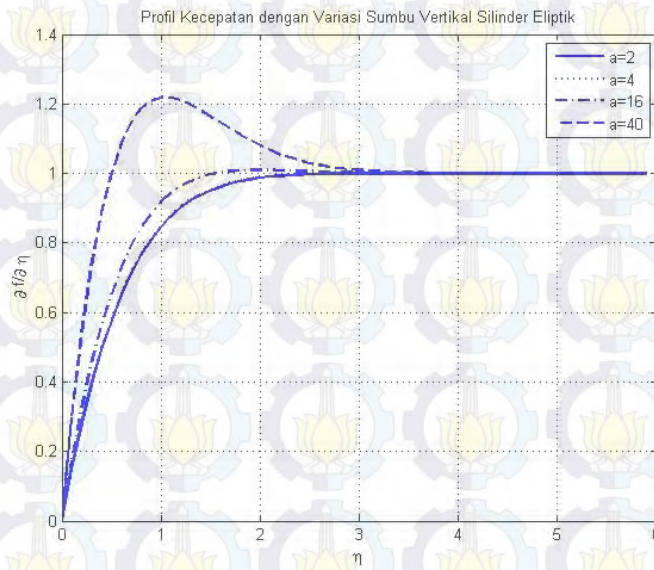
Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh dari perubahan sumbu horizontal dan sumbu vertikal terhadap profil kecepatan dan temperatur fluida.



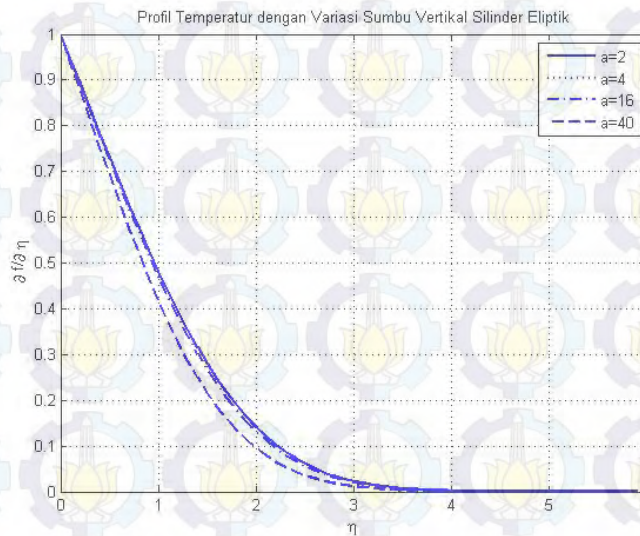
Gambar 5.9: Profil Temperatur dengan Variasi Nilai Sumbu Horizontal (b)

Sesuai dengan gambar silinder eliptik pada Gambar 4.1 yaitu a sebagai sumbu yang vertikal dan b sebagai sumbu yang horizontal. Pada penelitian ini menggunakan bentuk silinder eliptik *bluff body* dengan $a > b$. Akan tetapi pada simulasi ini digunakan beberapa variasi nilai sumbu horizontal dengan sumbu vertikal dan parameter lainnya tetap yaitu $M = 1$, $Pr = 0.7$ dan $\alpha = 1$. Variasi nilai sumbu horizontal pada simulasi ini yaitu $b = 2, 4, 20, 50$ dengan nilai $a = 4$ atau dapat dituliskan bahwa $b = 0.5a, a, 5a, 10a$. Pada simulasi pengaruh sumbu vertikal dan sumbu horizontal dapat juga dilakukan untuk $a > 0$ dan $b > 0$. Pada Gambar 5.8 didapatkan bahwa semakin panjang sumbu horizontal maka semakin menurun nilai kecepatan fluidanya. Hal ini terjadi karena gaya hambat dari benda pada fluida semakin besar dengan bertambahnya sumbu horizontal atau dapat dikatakan bahwa benda semakin lebar kesamping. Dengan semakin besarnya gaya hambat yang bekerja maka semakin kecil kecepatan fluida yang mengalir didekat dengan permukaan benda. Berbeda dengan kecepatan yang semakin menurun dengan bertambah panjangnya sumbu horizontal, pada temperatur fluida terjadi penurunan sesuai dengan Gambar 5.9, yaitu semakin besar atau panjang sumbu horizontal dari silinder eliptik maka semakin menurun temperatur fluidanya. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh konveksi campuran ($\alpha = 1$) dan pengaruh medan magnet. Adanya medan magnet pada konveksi campuran akan membuat gradien temperatur pada permukaan meningkat sehingga mempercepat adanya perpindahan panas dari permukaan ke fluida yang mengalir.

Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.10 dan Gambar 5.11 merupakan



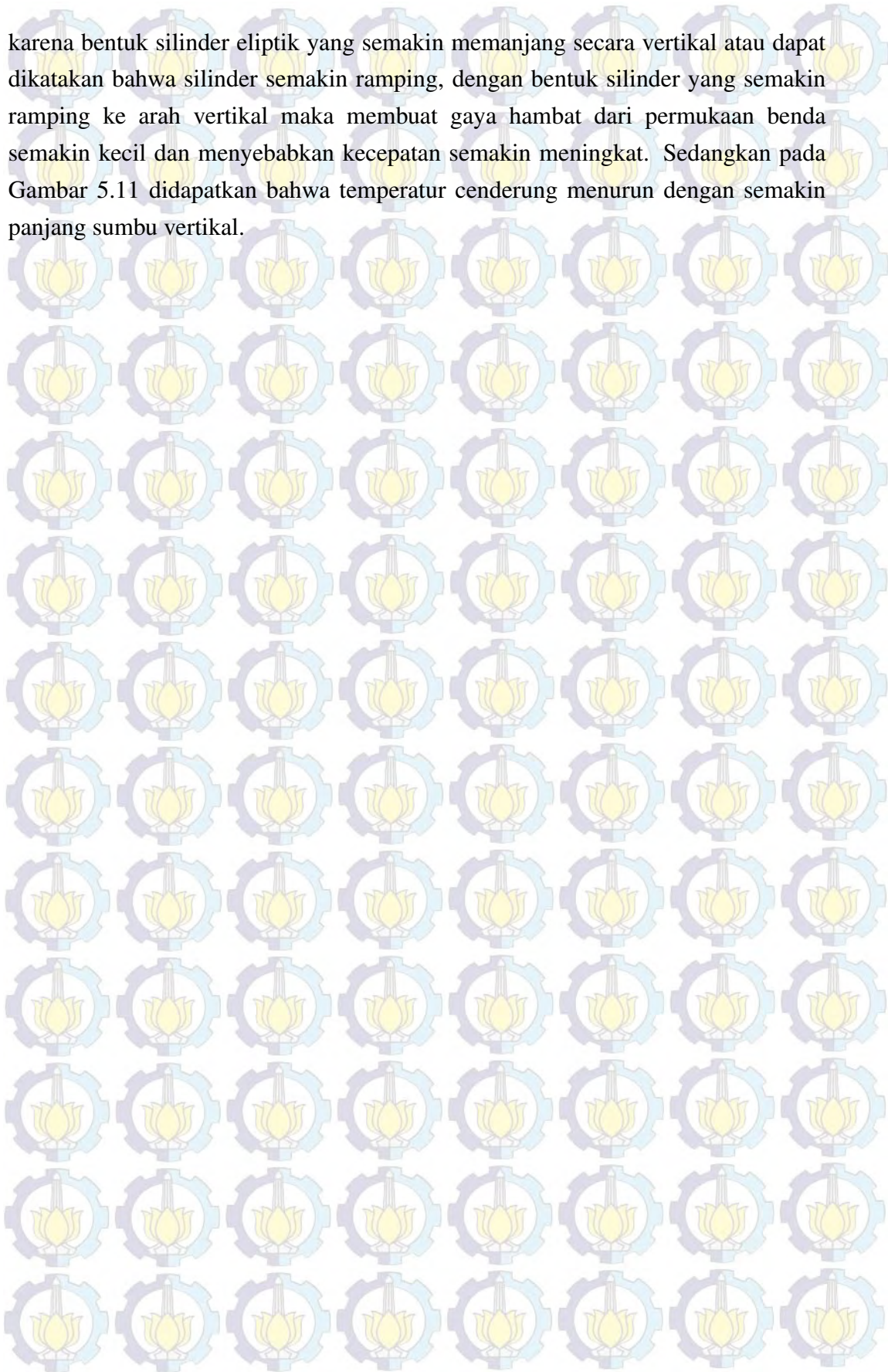
Gambar 5.10: Profil Kecepatan dengan Variasi Nilai Sumbu Vertikal (a)



Gambar 5.11: Profil Temperatur dengan Variasi Nilai Sumbu Vertikal (a)

profil kecepatan dan profil temperatur dengan variasi nilai sumbu vertikal. Pada simulasi ini menggunakan nilai $a = 2, 4, 16, 40$ dengan nilai $b = 2$ atau dapat dituliskan $a = b, 2b, 8b, 20b$, $\alpha = 0.01$, $M = 1$, dan $Pr = 0.7$. Berdasarkan grafik pada Gambar 5.10 didapatkan bahwa kecepatan fluida semakin meningkat seiring dengan semakin panjangnya sumbu vertikal dari silinder eliptik. Hal ini terjadi

karena bentuk silinder eliptik yang semakin memanjang secara vertikal atau dapat dikatakan bahwa silinder semakin ramping, dengan bentuk silinder yang semakin ramping ke arah vertikal maka membuat gaya hambat dari permukaan benda semakin kecil dan menyebabkan kecepatan semakin meningkat. Sedangkan pada Gambar 5.11 didapatkan bahwa temperatur cenderung menurun dengan semakin panjang sumbu vertikal.



BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Model matematika aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD yang melewati silinder eliptik dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi yang masing-masing diperoleh dari penerapan Hukum Kekekalan Massa, Hukum II Newton, dan Hukum I Termodinamika. Pendekatan Boussinesq diterapkan pada persamaan pembangun, kemudian diubah kebentuk model persamaan yang tak berdimensi, dan dilakukan transformasi kebentuk persamaan similaritas untuk mendapatkan model akhir dari aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD yang melewati silinder eliptik.
2. Model matematika aliran tak tunak konveksi paksa fluida kental MHD yang melewati silinder eliptik dapat diselesaikan dengan menggunakan metode numerik yaitu metode Keller-Box. Penyelesaian numerik ini diawali dengan mengubah model matematika kebentuk persamaan orde satu. Kemudian model matematika didiskritisasi dengan beda hingga pusat. Model matematika hasil diskritisasi berupa sistem persamaan yang tak linier, sehingga dilakukan linierisasi model dengan Metode Newton, dan diselesaikan dengan Metode Eliminasi Matriks Blok Tridiagonal.
3. Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, bilangan Prandtl, parameter konveksi, panjang sumbu vertikal dan horizontal silinder eliptik didapatkan bahwa:
 - a. Semakin meningkatnya parameter magnetik (M) didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat, sedangkan temperaturnya semakin menurun.
 - b. Semakin meningkatnya bilangan Prandtl (Pr) didapatkan bahwa kecepatan fluida semakin menurun tetapi penurunan yang dihasilkan tidak

signifikan. Temperatur fluida juga semakin menurun seiring bertambahnya bilangan Prandtl (Pr)

- c. Semakin meningkatnya parameter konveksi (α) didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat, sedangkan temeperturnya semakin menurun.
- d. Semakin panjang sumbu vertikal silinder eliptik (a) didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin meningkat, sedangkan temperaturnya semakin menurun.
- e. Semakin panjang sumbu horizontal silinder eliptik (b) didapatkan bahwa kecepatan fluida yang dihasilkan semakin menurun, sedangkan temperaturnya semakin meningkat.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian yang selanjutnya adalah sebagai berikut:

- Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ($x \neq 0$), sehingga dapat dilihat profil temperatur dan kecepatan disekeliling permukaan silinder eliptik.
- Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada silinder eliptik yang terletak pada aliran bebas tanpa halangan, diharapkan selanjutnya dapat dilakukan pada silinder eliptik yang terletak diantara dua dinding pembatas untuk mengetahui pengaruh pada lapisan batas yang dihasilkan.
- Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada aliran medan magnet yang tidak mengalami induksi, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan memperhitungkan adanya induksi medan magnet.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan Persamaan Komponen Tegangan Normal dan Tegangan Geser pada Penyelesaian Persamaan Momentum Sumbu x dan y

Turunan σ_{xx} terhadap x

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Turunan σ_{yy} terhadap y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Turunan τ_{yx} terhadap y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}$$

Turunan τ_{xy} terhadap x

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)\end{aligned}$$

sehingga komponen gaya permukaan yaitu

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \hat{j}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right) \hat{j}$$

berdasarkan persamaan kontinuitas yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

oleh karena itu gaya permukaan dapat dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \\ & \Leftrightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \hat{j} \\ & \Leftrightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \hat{i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \hat{j} \\ & \Leftrightarrow -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \end{aligned}$$

Lampiran 2. Transformasi Persamaan Pembangun ke Persamaan Non-dimensional

Berdasarkan variabel-variabel tak berdimensi (4.73), dengan mensubstitusikan variabel-variabel tersebut pada Persamaan (4.57), (4.70), (4.71) dan (4.59) maka didapatkan

Persamaan Kontinu

$$\begin{aligned}\frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{\partial(vU_\infty Re^{-\frac{1}{2}})}{\partial(ya Re^{-\frac{1}{2}})} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan kontinuitas tak berdimensi yaitu

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum Sumbu- x

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}}$$

a. Ruas Kiri

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left(\frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(taU_\infty^{-1})} + uU_\infty \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + vU_\infty Re^{-1/2} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(ya Re^{-1/2})} \right) \\ &= \rho \left(\frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

b. Ruas Kanan

$$\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{u} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{x}} &= -\frac{\partial(p\rho U_\infty^2)}{\partial(xa)} + \mu \left(\frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(ya Re^{-1/2})^2} \right) - \sigma B_0^2 uU_\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \beta T (T_w - T_\infty) g_x \\
& = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{U_\infty}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma B_0^2 u U_\infty \\
& + \rho \beta T (T_w - T_\infty) g_x \\
& = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \sigma B_0^2 u U_\infty \\
& + \rho \beta T (T_w - T_\infty) g_x
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapatkan

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{U_\infty}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
& - \sigma B_0^2 u U_\infty + \rho \beta T (T_w - T_\infty) g_x
\end{aligned}$$

dengan membagi kedua ruas dengan $(\rho \frac{U_\infty^2}{a})$ didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho U_\infty a} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma a}{\rho U_\infty} B_0^2 u \\
& + \frac{a}{U_\infty^2} \beta T (T_w - T_\infty) g_x \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{U_\infty a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{U_\infty a Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\sigma a B_0^2}{\rho U_\infty} \right) u \\
& + \frac{a}{U_\infty^2} \beta (T_w - T_\infty) T g \sin A \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{Re Re^{-1}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \alpha T \sin A \\
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} & = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Mu + \alpha T \sin A
\end{aligned}$$

Persamaan Momentum sb-y

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}}$$

a. Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) & = \rho \left(\frac{\partial (v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial (ta U_\infty^{-1})} + u U_\infty \frac{\partial (v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial (xa)} \right. \\
& \left. + v U_\infty Re^{-1/2} \frac{\partial (v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial (ya Re^{-1/2})} \right) \\
& = \rho \left(Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial v}{\partial t} + Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial v}{\partial x} \right.
\end{aligned}$$

$$+ Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial v}{\partial y} \Bigg) \\ = \rho Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

b. Ruas Kanan

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \sigma B_0^2 \bar{v} - \rho \beta (\bar{T} - T_\infty) g_{\bar{y}} \\ & = -\frac{\partial(p \rho U_\infty^2)}{\partial(y a Re^{-1/2})} + \mu \left(\frac{\partial^2(v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial(x a)^2} + \frac{\partial^2(v U_\infty Re^{-1/2})}{\partial(y a Re^{-1/2})^2} \right) \\ & \quad - \sigma B_0^2 v U_\infty Re^{-1/2} - \rho \beta T (T_w - T_\infty) g_y \\ & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{-1/2}}{a^2 Re^{-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & \quad - U_\infty Re^{1/2} \sigma B_0^2 v - \rho \beta (T_w - T_\infty) T g \cos A \\ & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \rho \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & \quad - U_\infty Re^{-1/2} \sigma B_0^2 v - \rho \beta (T_w - T_\infty) T g \cos A \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \rho Re^{-1/2} \frac{U_\infty^2}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \rho \frac{U_\infty}{a^2 Re^{-1/2}} \\ & \quad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - U_\infty Re^{-1/2} \sigma B_0^2 v \\ & \quad - \rho \beta (T_w - T_\infty) T g \cos A \end{aligned}$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\left(\frac{\rho U_\infty^2}{a Re^{-1/2}} \right)$ didapatkan

$$\begin{aligned} Re^{-1} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{Re^{-1}}{\rho a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{a Re^{-1}}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 v \\ & \quad - \frac{a Re^{-1/2}}{U_\infty^2} \beta (T_w - T_\infty) T g \cos A \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\nu \rho Re^{-1}}{a \rho U_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & \quad - Re^{-1} \left(\frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \right) v - \alpha Re^{-1/2} T \cos A \\ \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) & = -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - Re^{-1} M v \\ & \quad - \alpha Re^{-1/2} T \cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\nu \rho Re^{-1}}{a \rho U_\infty} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - Re^{-1} \left(\frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \right) v - \alpha Re^{-1/2} T \cos A \\
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&\quad - Re^{-1} Mv - \alpha Re^{-1/2} T \cos A \\
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{M}{Re} v \\
&\quad - \frac{\alpha}{Re^{1/2}} T \cos A
\end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

a. Ruas Kiri

$$\begin{aligned}
\rho C_p \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho C_p \left(\frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ta U_\infty^{-1})} \right. \\
&\quad \left. + u U_\infty \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (xa)} \right. \\
&\quad \left. + v U_\infty Re^{-1/2} \frac{\partial (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ya Re^{-1/2})} \right) \\
&= \rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
&\quad + \rho C_p \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T_\infty}{\partial t} + u \frac{\partial T_\infty}{\partial x} + v \frac{\partial T_\infty}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

Karena T_∞ adalah suatu konstanta maka $\frac{\partial T_\infty}{\partial t} = 0$, sehingga ruas kiri menjadi

$$\rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

b. Ruas Kanan

$$\begin{aligned}
c \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) &= c \left(\frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 (T(T_w - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (ya Re^{-1/2})^2} \right) \\
&= c \left(\frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\
&= c \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka dapat dituliskan

$$\rho C_p (T_w - T_\infty) \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c \frac{(T_w - T_\infty)}{a^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $\frac{\rho C_p (T_w - T_\infty) U_\infty}{a}$ didapatkan

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c}{a U_\infty \rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c}{a U_\infty \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{c Re}{a U_\infty \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c}{\nu Re \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{c Re}{\nu Re \rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Lampiran 3. Perhitungan Persamaan Similaritas

Berdasarkan persamaan tak berdimensi yaitu pada Persamaan (4.79), (4.88) dan (4.82) dilakukan transformasi ke bentuk persamaan similaritas dengan menggunakan fungsi alir sesuai dengan (4.89) yaitu

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan variabel similaritas yang telah ditunjukkan pada Persamaan (4.94) yaitu

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t) \quad T = s(x, \eta, t) \quad \eta = \frac{y}{t^{1/2}}$$

sehingga didapatkan

Persamaan Kontinu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad - M(u - u_e) + \alpha T \sin A \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &\quad - M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \sin A \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \\ &\quad - M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \sin A \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial(t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} = u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial t^{1/2} u_e(x) f(x, \eta, t)}{\partial x} = t^{1/2} f(x, \eta, t) \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} + t^{1/2} u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{1}{t^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right)$$

$$= \frac{\partial u_e(x)}{\partial x} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(u_e(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right)$$

$$+ u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta} = -\frac{u_e(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} + u_e(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial t \partial \eta}$$

untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa $u_e(x) = u_e$ dan $f(x, \eta, t) = f$ sehingga persamaan similaritas untuk persamaan momentum yaitu

- Ruas Kiri

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\frac{u_e}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\ &\quad - \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

• Ruas Kanan

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - M \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - u_e \right) + \alpha T \sin A = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{t} u_e \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} - M \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \alpha s \sin A$$

Karena ruas kiri dan ruas kanan sama sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} & -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) - \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \\ & - M \left(u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} - u_e \right) + \alpha s \sin A \\ \Leftrightarrow & -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - u_e f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ & - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M u_e \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \alpha s \sin A \end{aligned}$$

kedua ruas dibagi dengan $\frac{u_e}{t}$ didapatkan

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\ & = t \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \alpha t s \frac{\sin A}{u_e} \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t \frac{\partial u_e}{\partial x} \left(1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + M t \left(1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \alpha t s \frac{\sin A}{u_e} \\ & = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

Persamaan Energi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} + \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \frac{1}{t^{1/2}} \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{t} \frac{\partial^2 s(x, \eta, t)}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

untuk selanjutnya dapat dituliskan bahwa $s(x, \eta, t) = s$ sehingga persamaan similaritas untuk energi yaitu

$$\begin{aligned}-\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \left(t^{1/2} f \frac{\partial u_e}{\partial x} + t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{t^{1/2}} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) &= \frac{1}{t} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\eta}{2t} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \frac{\partial s}{\partial t} + u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{t} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2}\end{aligned}$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\text{Pr}t$ didapatkan

$$\begin{aligned}-\text{Pr}t \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t} + \text{Pr}t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} - \text{Pr}t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \text{Pr}t u_e \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \text{Pr}t \frac{\eta}{2} \frac{\partial s}{\partial \eta} + \text{Pr}t f \frac{\partial u_e}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \text{Pr}t u_e \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t}\end{aligned}$$

Lampiran 4. Penurunan Kondisi Awal

Bentuk persamaan untuk menentukan kondisi awal yaitu

$$\begin{aligned} f''' + \frac{\eta}{2} f'' + t(1 - (f')^2 + f f'') + Mt(1 - f') &= t \frac{\partial f'}{\partial t} \\ s'' + \text{Pr} \frac{\eta}{2} s' + \text{Pr} t f s' &= \text{Pr} t \frac{\partial s}{\partial t} \end{aligned}$$

dengan menyubstitusikan $t = 0$ maka didapatkan persamaan

$$\begin{aligned} f''' + \frac{\eta}{2} f'' &= 0 \\ s'' + \text{Pr} \frac{\eta}{2} s' &= 0 \end{aligned}$$

untuk mendapatkan f digunakan persamaan

$$f''' + \frac{\eta}{2} f'' = 0$$

diubah terlebih dulu kedalam bentuk persamaan diferensial tingkat satu, dengan memisalkan $f'' = h$ sehingga persamaan menjadi

$$h' + \frac{\eta}{2} h = 0$$

dengan $h' = dh/d\eta$ maka dapat dituliskan

$$dh + \frac{\eta}{2} h d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi dengan h sehingga didapatkan

$$\frac{1}{h} dh + \frac{\eta}{2} d\eta = 0$$

kedua ruas diintegralkan didapatkan

$$\begin{aligned} \ln h + \frac{\eta^2}{4} &= c_1 \\ \ln h &= -\frac{\eta^2}{4} + c_1 \\ h &= e^{-\frac{\eta^2}{4} + c_1} \\ h &= e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \end{aligned}$$

karena $h = f''$ maka

$$\begin{aligned} f'' &= e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \\ f' &= \int e^{c_1} e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta \\ f' &= e^{c_1} \int e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta \end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan (4.102) didapatkan

$$\text{saat } \eta = 0 \Rightarrow e^{c_1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (6.1)$$

sehingga

$$f' = \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \quad (6.2)$$

dan

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \quad (6.3)$$

dan dengan mengintegrasikan f' didapatkan

$$f = \eta \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) - 1 \right\}$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan s dengan memisalkan $s' = k$ sehingga

$$k' + \frac{\operatorname{Pr}\eta}{2} k = 0$$

dengan $k' = dk/d\eta$ maka dapat dituliskan

$$dk + \frac{\operatorname{Pr}\eta}{2} k d\eta = 0$$

kedua ruas dibagi dengan k sehingga didapatkan

$$\frac{1}{k} dk + \frac{\operatorname{Pr}\eta}{2} d\eta = 0$$

kedua ruas diintegralkan didapatkan

$$\begin{aligned}\ln k + \frac{\text{Pr}\eta^2}{4} &= c_2 \\ \ln k &= -\frac{\text{Pr}\eta^2}{4} + c_2 \\ k &= e^{-\frac{\text{Pr}\eta^2}{4} + c_2} \\ k &= e^{c_2} e^{-\frac{\text{Pr}\eta^2}{4}}\end{aligned}$$

karena $k = s'$ maka

$$\begin{aligned}s' &= e^{c_2} e^{-\frac{\eta^2}{4}} \\ s &= \int e^{c_2} e^{-\frac{\text{Pr}\eta^2}{4}} d\eta \\ s &= e^{c_2} \int e^{-\frac{\text{Pr}\eta^2}{4}} d\eta\end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan (4.102) didapatkan

$$\text{saat } \eta = 0 \Rightarrow e^{c_2} = -\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\pi}}$$

sehingga didapatkan

$$s' = -\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\pi}} \exp \left\{ -\frac{\text{Pr}}{4} \eta^2 \right\}$$

dengan mengintegralkan s' didapatkan

$$s = -\text{erf} \left(\frac{\sqrt{\text{Pr}}}{2} \eta \right) + 1$$

Lampiran 5. Diskritisasi Model

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu

$$f' = u$$

$$u' = v$$

$$s' = q$$

$$v' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - u^2 + fv) + Mt(1 - u) + \alpha tsw = t \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$q' + \frac{\text{Pr}}{2}\eta q + \text{Pr}t f q = \text{Pr}t \frac{\partial s}{\partial t}$$

dapat didiskritisasi menjadi

$$1. \quad \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$2. \quad \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$$

$$3. \quad \frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) = q_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(s_j^n - s_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(q_j^n + q_{j-1}^n)$$

$$4. \quad \frac{1}{2}[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [v' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - u^2 + fv) + Mt(1 - u) + \alpha tsw]_{j-\frac{1}{2}}^n \\ &= \left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2}v_{j-1/2}^n + t^n \left(1 - (u_{j-1/2}^n)^2 + f_{j-1/2}^n v_{j-1/2}^n \right) \\ &= Mt^n(1 - u_{j-1/2}^n) + \alpha \omega t^n s_{j-1/2}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [v' + \frac{\eta}{2}v + t(1 - u^2 + fv) + Mt(1 - u) + \alpha tsw]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\ &= \left(\frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-1/2}}{2}v_{j-1/2}^{n-1} + t^{n-1} \left(1 - (u_{j-1/2}^{n-1})^2 + f_{j-1/2}^{n-1} v_{j-1/2}^{n-1} \right) \\ &= Mt^{n-1}(1 - u_{j-1/2}^{n-1}) + \alpha \omega t^{n-1} s_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) + M t^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \right. \\
& \quad \left. + \alpha \omega t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right. \\
& \quad \left. + t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) + M t^{n-\frac{1}{2}} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right. \\
& \quad \left. + \alpha \omega t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) + \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& \Leftrightarrow \frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) + M t^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& \quad + \alpha \omega t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& \quad - t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) - M t^{n-\frac{1}{2}} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& \quad - \alpha \omega t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{2} \left[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = \text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{s_{j-\frac{1}{2}}^n - s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [q' + \frac{\text{Pr}}{2} \eta q + \text{Pr} t f q]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= \left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \\
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [q' + \frac{\text{Pr}}{2} \eta q + \text{Pr} t f q]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= \left(\frac{q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \text{Pr} \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \text{Pr} t^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \text{Pr} t^n (f q)_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \text{Pr} t^{n-1} (f q)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \\
& = \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n + \text{Pr} t^n (f q)_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \text{Pr} t^{n-1} (f q)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan diskritisasi selanjutnya dilakukan linierisasi dengan metode Newton sebagai berikut

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta f_j - \delta f_{j-1}) &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) \\
(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) \\
(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta q_j - \delta q_{j-1}) &= \frac{1}{2} (s_j^n + s_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) \\
(\delta s_j - \delta s_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta q_j + \delta q_{j-1}) &= -(s_j^n - s_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (q_j^n + q_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left(\frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
&+ t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 + \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \right) + M t^n \left(1 - \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \omega t^n \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \\
& = R_1 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\delta v_j - \delta v_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) - t^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right)^2 \\
& \quad - t^n \left(2u_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) \right) + t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \\
& \quad + t^n v_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + t^n \left(\frac{\delta v_j + \delta v_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \\
& \quad - Mt^n \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) + \alpha \omega t^n \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) \\
& \quad - 2 \frac{t^{n-1/2}}{k^n} \left(\frac{\delta u_j + \delta u_{j-1}}{2} \right) = - \left(\frac{(v_j^n - v_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& \quad + t^n \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) + Mt^n (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& \quad + \alpha \omega t^n s_{j-\frac{1}{2}}^n - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n \Big) + R_1
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& + \text{Pr} t^n \left(f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(q_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(s_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) = R_2 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{\delta q_j - \delta q_{j-1}}{l_j} \right) + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) + \text{Pr} t^n f_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& + \text{Pr} t^n q_{j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) + \text{Pr} t^n \left(\frac{\delta f_j + \delta f_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{\delta q_j + \delta q_{j-1}}{2} \right) \\
& - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left(\frac{\delta s_j + \delta s_{j-1}}{2} \right) = - \left(\frac{(q_j^n - q_{j-1}^n)}{l_j} + \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^n \right. \\
& + \text{Pr} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n q_{j-\frac{1}{2}}^n) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^n \Big) + R_2
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
R_1 & = - \frac{(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \right) \\
& - Mt^{n-\frac{1}{2}} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - \alpha \omega t^{n-1} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + 2 \frac{t^{n-1}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
R_2 & = - \frac{(q_j^{n-1} - q_{j-1}^{n-1})}{l_j} - \frac{\text{Pr}}{2} \eta_{j-\frac{1}{2}} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \text{Pr} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} q_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{\text{Pr} t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} s_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Lampiran 6. Program Matlab

```
clear all
clc
close all
format long
np = 60; %% banyak partisi eta
nt = 33; %% banyak partisi waktu
nt1= 21; %% banyak partisi waktu untuk small time
Pr =0.7; %% bilangan Prandtl
alpha=0; %% Parameter Konveksi
may=4; %% sumbu vertikal
min=2; %% sumbu horizontal
omega=(may/min)^2;
deleta = 0.1; %% step size dari eta
eta(1) = 0.0;
etac(1) = 0.0;
delt = 0.05; %% step size dari waktu
Magnet(1)=0;
Magnet(2)=10;
Magnet(3)=50;
Magnet(4)=100;
%% Penghitungan eta dan eta^{j-1/2}
for j = 2:np
    eta(j) = eta(j-1) + deleta;
    etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
end
%%Penghitungan waktu t dan t^{n-1/2}
for n = 1 : nt
    if n == 1
        t(1) = 0.0;
        t1(1) = 0.0;
    else
        t(n) = t(n-1) + delt;
        t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
    end
end
end
```



```

for i=1:4
    %k=1;
    M=Magnet(i);
for n = 1:nt
        k=1;
        stop = 1;
while stop > 0.00001
    %% Initial Condition
for j = 1:np
        if n == 1
            f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*eta(j)) + (2\sqrt(pi))*(
                exp(-0.25*((eta(j))^2))-1);
            u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j));
            v(j,1,n) = (1/\sqrt(pi))*exp(-0.25*((eta(j))^2));
            s(j,1,n) = -erf(0.5*(sqrt(Pr))*eta(j)) + 1;
            q(j,1,n) = - sqrt(Pr/pi)*exp(-0.25*Pr*(eta(j))^2);
        else
            f(j,1,n) = ff(j,n-1);
            u(j,1,n) = uu(j,n-1);
            v(j,1,n) = vv(j,n-1);
            s(j,1,n) = ss(j,n-1);
            q(j,1,n) = qq(j,n-1);
        end
    end
for j = 2:np
        if n == 1
            cfb(j,n) = 0;    cub(j,n) = 0;
            cvb(j,n) = 0;    cdervb(j,n) = 0;
            cfvfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
            csb(j,n) = 0;    cqjb(j,n) = 0;
            cderqb(j,n) = 0;    cfqfqjb(j,n) = 0;
            cunb(j,n)=cub(j,n)^2;
        else
            cfb(j,n)= ffb(j,n-1);
            cub(j,n)= utb(j,n-1);

```



```

cvb(j,n)= vvb(j,n-1);
csb(j,n)= ssb(j,n-1);
cqb(j,n)= qqb(j,n-1);
cunb(j,n)=cub(j,n)^2;
cfvfvb(j,n)= cfb(j,n)*cvb(j,n);
cdervb(j,n)= ddervb(j,n-1);
cderqb(j,n)= dderqb(j,n-1);
cfqfqb(j,n)= cfb(j,n)*cqb(j,n);
end
fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n)+f(j-1,k,n));
ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n)+u(j-1,k,n));
vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n)+v(j-1,k,n));
sb(j,k,n) = 0.5*(s(j,k,n)+s(j-1,k,n));
qb(j,k,n) = 0.5*(q(j,k,n)+q(j-1,k,n));
dervb(j,k,n) = (v(j,k,n)-v(j-1,k,n))/deleta;
fvfvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
unb(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
derqb(j,k,n) = (q(j,k,n)-q(j-1,k,n))/deleta;
fqfqb(j,k,n) = fb(j,k,n)*qb(j,k,n);

if n < nt1+1
a1(j,k) = 0.5*t1(n)*vb(j,k,n);
a2(j,k) = a1(j,k);
a3(j,k) = -t1(n)*ub(j,k,n) - 0.5*M*t1(n) - t1(n)
)/delt;
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = 1/deleta + 0.25*etac(j) + 0.5*t1(n)*
fb(j,k,n);
a6(j,k) = -1/deleta + 0.25*etac(j) + 0.5*t1(n)*
fb(j,k,n);
a7(j,k) = alpha*omega*t1(n)*0.5;
a8(j,k) = a7(j,k);
b1(j,k) = 1/deleta + 0.25*Pr*etac(j) + 0.5*Pr*
t1(n)*fb(j,k,n);

```



```

b2(j,k) = -1/deleta + 0.25*Pr*etac(j) + 0.5*Pr*
    t1(n)*fb(j,k,n);
b3(j,k) = 0.5*Pr*t1(n)*qb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -(Pr*t1(n))/delt;
b6(j,k) = b5(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qb(j,k,n);
r4(j,k) = -cdervb(j,n) - 0.5*etac(j)*cvb(j,n) -
    t1(n)*(1-cunb(j,n) + cfvfvb(j,n)) - M*t1(n)
    *(1-cub(j,n)) - ...
    2*t1(n)*cub(j,n)/delt - alpha*omega*t1(n)*
    csb(j,n) - dervb(j,k,n) - 0.5*etac(j)*vb
    (j,k,n)- t1(n)*(1-unb(j,k,n) + fvfvb(j,k
    ,n)) - ...
    M*t1(n)*(1-ub(j,k,n)) + 2*t1(n)*ub(j,k,n)/
    delt - alpha*omega*t1(n)*sb(j,k,n);
r5(j,k) = -cderqb(j,n) - 0.5*Pr*etac(j)*cqb(j,n)
    ) - Pr*t1(n)*cfqfqb(j,n) - ...
    2*Pr*t1(n)*csb(j,n)/delt -derqb(j,k,n) -
    0.5*Pr*etac(j)*qb(j,k,n) - ...
    Pr*t1(n)*fqfqb(j,k,n) + 2*Pr*t1(n)*sb(j,k,n
    )/delt;

else
a1(j,k) = 0.5*vb(j,k,n);
a2(j,k) = a1(j,k);
a3(j,k) = -ub(j,k,n) - 0.5*M - 1/delt;
a4(j,k) = a3(j,k);
a5(j,k) = 1/deleta + 0.5*fb(j,k,n);
a6(j,k) = -1/deleta + 0.5*fb(j,k,n);
a7(j,k) = alpha*omega*0.5;
a8(j,k) = a7(j,k);

```



```

b1(j,k) = 1/deleta + 0.5*Pr*fb(j,k,n);
b2(j,k) = -1/deleta + 0.5*Pr*fb(j,k,n);
b3(j,k) = 0.5*Pr*qb(j,k,n);
b4(j,k) = b3(j,k);
b5(j,k) = -Pr/delt;
b6(j,k) = b5(j,k);

r1(j,k) = f(j-1,k,n)-f(j,k,n)+deleta*ub(j,k,n);
r2(j,k) = u(j-1,k,n)-u(j,k,n)+deleta*vb(j,k,n);
r3(j,k) = s(j-1,k,n)-s(j,k,n)+deleta*qb(j,k,n);
r4(j,k) = -cdervb(j,n) - (1-cunb(j,n) + cfvfvb(
j,n)) - M*(1-cub(j,n)) - ...
2*cub(j,n)/delt - alpha*omega*csb(j,n) -
dervb(j,k,n) - (1-unb(j,k,n) + fvfvb(j,k
,n)) - ...
M*(1-ub(j,k,n)) + 2*ub(j,k,n)/delt - alpha*
omega*sb(j,k,n);
r5(j,k) = -cderqb(j,n) - Pr*cfqfqqb(j,n) - ...
2*Pr*csb(j,n)/delt - derqb(j,k,n) - Pr*
fqfqqb(j,k,n) + 2*Pr*sb(j,k,n)/delt;
end
end
% Matrices
a{2,k} = [ 0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta
0; 0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta; a6(2,k) 0 a1
(2,k) a5(2,k) 0; 0 b2(2,k) b3(2,k) 0 b1(2,k)];
for j = 3:np
a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5*
deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta; a4(j,k) a8(j
,k) a1(j,k) a5(j,k) 0; 0 b6(j,k) b3(j,k) 0
b1(j,k)];
b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0; 0 0
0 0 -0.5*deleta; 0 0 a2(j,k) a6(j,k) 0; 0 0
b4(j,k) 0 b2(j,k)];
end;
for j = 2:np

```



```

c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0
          0 0; a3(j,k) a7(j,k) 0 0 0; 0 b5(j,k) 0 0
          0];

end;
alfa{2,k} = a{2,k};
gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
for j = 3:np
    alfa{j,k} = a{j,k} - (b{j,k}*gamma{j-1,k});
    gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
end;
for j = 2:np
    rr{j,k} = [r1(j,k); r2(j,k); r3(j,k); r4(j,k); r5(j
    ,k)];
end;
ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
for j = 3:np
    ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} - (b{j,k}*ww{j
    -1,k}));
end;
%% backward sweep
delu(1,k) = 0;
dels(1,k) = 0;
delf(1,k) = 0;
delu(np,k) = 0;
dels(np,k) = 0;
dell{np,k} = ww{np,k};
for j = np-1:-1:2
    dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k}*dell{j+1,k});
end;
delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);
delq(1,k) = dell{2,k}(2,1);
delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
delq(2,k) = dell{2,k}(5,1);

```



```

for j = np:-1:3
    delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
    dels(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
    delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
    delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
    delq(j,k) = dell{j,k}(5,1);
end;

```

%% Newton's Method

```

for j = 1:np
    f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
    u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
    v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
    s(j,k+1,n) = s(j,k,n) + dels(j,k);
    q(j,k+1,n) = q(j,k,n) + delq(j,k);
end;
stop = abs(delv(1,k));
kmax = k;
k = k + 1;

```

end

```

for j = 1:np
    ff(j,n) = f(j,k,n);
    uu(j,n) = u(j,k,n);
    vv(j,n) = v(j,k,n);
    ss(j,n) = s(j,k,n);
    qq(j,n) = q(j,k,n);
end

```

```

for j=1:np
   ffb(j,n) = fb(j,kmax,n);
    utb(j,n) = ub(j,kmax,n);
    vvb(j,n) = vb(j,kmax,n);
    ssb(j,n) = sb(j,kmax,n);
    qqb(j,n) = qb(j,kmax,n);
    ddervb(j,n) = dervb(j,kmax,n);
    dderqb(j,n) = derqb(j,kmax,n);
end

```

end


```

end

if (i==1)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'b','linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,s(:,kmax,nt),'b','linewidth',2)
hold on;
elseif(i==2)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),':', 'linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,s(:,kmax,nt),':', 'linewidth',2)
hold on;
elseif(i==3)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'-.', 'linewidth',2)
hold on;
figure(2)
plot(eta,s(:,kmax,nt),'-.', 'linewidth',2)
hold on;
elseif(i==4)
figure(1)
plot(eta,u(:,kmax,nt),'—', 'linewidth',2)
hold on;
title('Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter
Magnetik')
legend('M=0','M=1','M=5','M=10')
xlabel('\eta')
ylabel('\partial f/\partial \eta')
grid on;
figure(2)
plot(eta,s(:,kmax,nt),'—', 'linewidth',2)

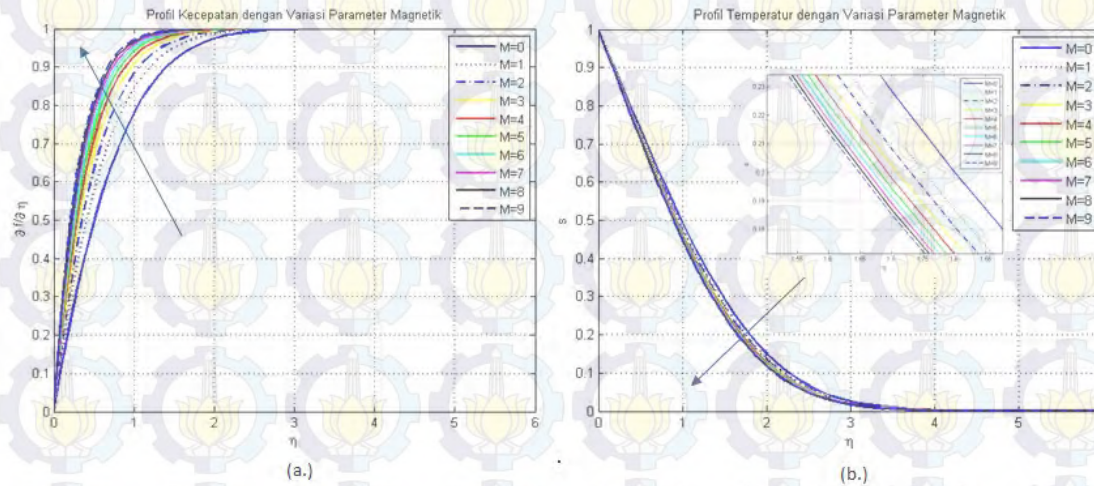
```



```
hold on;  
title('Profil Temperatur dengan Variasi Parameter  
Magnetik')  
legend('M=0','M=1','M=5','M=10')  
xlabel('\eta')  
ylabel('s')  
grid on;  
end  
end  
% u(20:40,kmax,nt)  
% s(30:50,kmax,nt)
```

Lampiran 7. Hasil Simulasi

Hasil 1. Variasi Parameter Magnetik dengan Beberapa Macam Inputan



Gambar 6.1: (a.) Profil Kecepatan dengan Variasi M dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi M

Tanda panah pada gambar menunjukkan bahwa dengan kecepatan semakin naik dan temperatur menurun dengan bertambahnya nilai M , nilai variasi M yang digunakan yaitu $M = 0, 1, 2, 3, \dots, 9$. Karena pada gambar menunjukkan bahwa kecepatan meningkat dan temperatur semakin menurun seiring dengan bertambahnya nilai parameter M maka dapat diambil beberapa nilai M yang digunakan pada simulasi pada Bab V.

Tabel 6.1: Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Magnetik

M	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
0	0.966910076	0.998012701	0.999936985
1	0.982575644	0.999222978	0.999976159
5	0.997194908	0.999949193	0.999997099
10	0.999450588	0.999995675	0.999999301

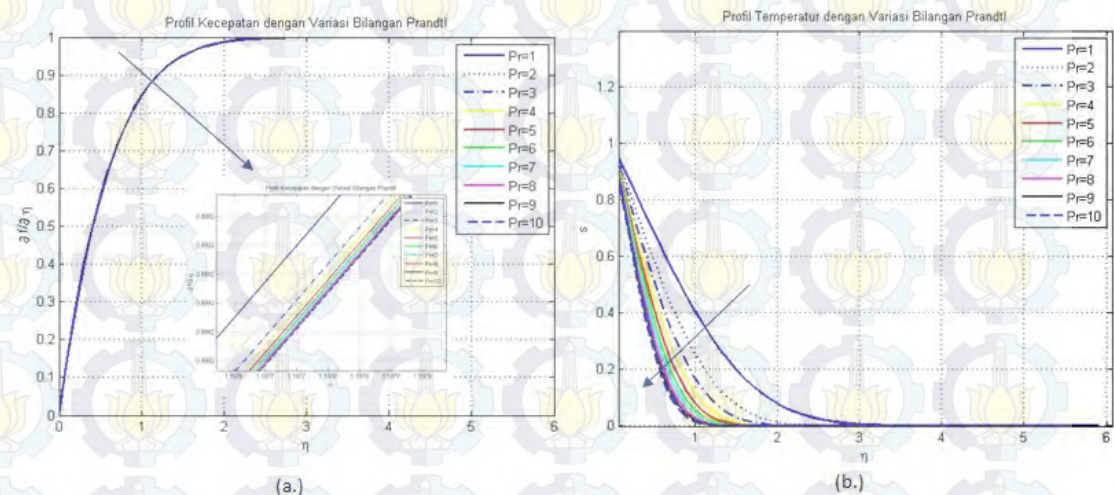
Tabel 6.2: Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Magnetik

M	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta = 5$
0	0.031318155	0.003313177	0.00061016
1	0.02743008	0.002797764	0.000579777
5	0.022707616	0.002246165	0.000550982
10	0.020375605	0.001988986	0.00053822

Tabel 6.3: Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Parameter Magnetik

M	f'	s
0	0.736836298	0.174278439
1	0.807430473	0.161803773
2	0.851379862	0.156426569
3	0.881453139	0.151383541
4	0.903246022	0.147553432
5	0.919679008	0.144519258
6	0.932434117	0.142039632
7	0.942555709	0.139964727
8	0.950729375	0.13819567
9	0.957424843	0.136664563

Hasil 2. Variasi Bilangan Prandtl dengan Beberapa Macam Inputan



Gambar 6.2: (a.) Profil Kecepatan dengan Variasi Pr dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi Pr

Tanda panah pada gambar menunjukkan bahwa dengan kecepatan dan temperatur semakin menurun dengan bertambahnya nilai Pr , nilai variasi Pr yang digunakan yaitu $Pr = 1, 2, 3, \dots, 10$. Karena pada gambar menunjukkan bahwa kecepatan dan temperatur semakin menurun seiring dengan bertambahnya nilai parameter Pr maka dapat diambil beberapa nilai Pr yang digunakan pada simulasi pada Bab V.

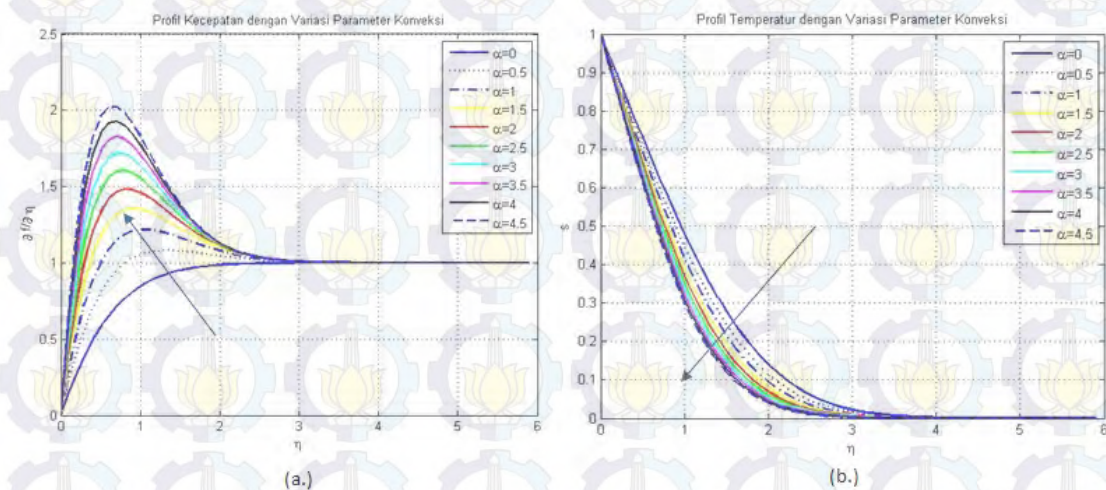
Tabel 6.4: Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Bilangan Prandtl

Pr	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
0.7	0.982593365	0.999225553	0.999976372
7	0.982576874	0.999223035	0.99997616
20	0.982576111	0.999223001	0.999976159
100	0.982575761	0.999222984	0.999976159

Tabel 6.5: Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Bilangan Prandtl

Pr	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta = 5$
0.7	0.02742799	0.0027975	0.000579762
7	0.011891268	2.24×10^{-13}	1×10^{-15}
20	0.0051375733	5.257×10^{-15}	1.34×10^{-16}
100	0.000128019	3.24×10^{-16}	1.254×10^{-17}

Hasil 3. Variasi Parameter Konveksi dengan Beberapa Macam Inputan



Gambar 6.3: (a.) Profil Kecepatan dengan Variasi α dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi α

Tanda panah pada gambar menunjukkan bahwa dengan kecepatan semakin naik dan temperatur menurun dengan bertambahnya nilai α , nilai variasi α yang digunakan yaitu $\alpha = 0, 0.5, 1, 1.5, \dots, 4.5$. Karena pada gambar menunjukkan bahwa kecepatan meningkat dan temperatur semakin menurun seiring dengan bertambahnya nilai parameter α maka dapat diambil beberapa nilai α yang digunakan pada simulasi pada Bab V.

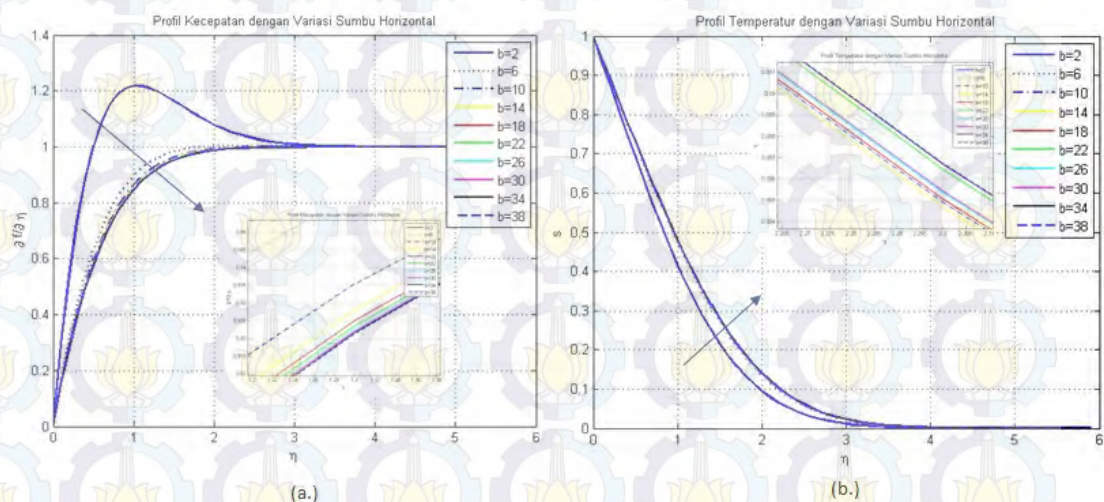
Tabel 6.6: Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Bilangan Prandtl

Pr	f'	s
1	0.807430473	0.09735739
2	0.807430473	0.020760856
3	0.807430473	0.004798979
4	0.807430473	0.00112842
5	0.807430473	2.62×10^{-4}
6	0.807430473	5.85×10^{-5}
7	0.807430473	1.23×10^{-5}
8	0.807430473	2.36×10^{-6}
9	0.807430473	3.93×10^{-7}
10	0.807430473	5.29×10^{-8}

Tabel 6.7: Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Konveksi (α)

α	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
0	0.982575644	0.999222978	0.999976159
0.5	1.051979769	1.007953592	1.000680695
1	1.093858523	1.011557935	1.000992592
1.5	1.120171494	1.012956752	1.001179312

Hasil 4. Variasi Sumbu Horizontal dengan Beberapa Macam Inputan



Gambar 6.4: (a.) Profil Kecepatan dengan Variasi b dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi b

Tanda panah pada gambar menunjukkan bahwa kecepatan semakin menurun dan temperatur meningkat dengan bertambahnya nilai b , nilai variasi b yang digunakan yaitu $b = 2, 6, 10, \dots, 38$. Karena pada gambar menunjukkan

Tabel 6.8: Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Parameter Konveksi (α)

α	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta = 5$
0	0.02743008	0.002797764	0.000579777
0.5	0.019601335	0.00188864	0.000533065
1	0.014482334	0.001376558	0.000510268
1.5	0.011146219	0.001085889	0.000498969

Tabel 6.9: Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Parameter Konveksi (α)

α	f'	s
0	0.807430473	0.161803773
0.5	1.030615749	0.133825014
1	1.208751643	0.112470211
1.5	1.355966251	0.096469029
2	1.480841991	0.084088054
2.5	1.588890596	0.074252292
3	1.68382867	0.066266623
3.5	1.768266934	0.059664343
4	1.844103924	0.054121721
4.5	1.912493938	0.049387032

bahwa kecepatan menurun dan temperatur semakin meningkat seiring dengan bertambahnya nilai parameter b maka dapat diambil beberapa nilai b yang digunakan pada simulasi pada Bab V.

Tabel 6.10: Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)

b	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
2	1.093858523	1.011557935	1.000992592
4	1.021839094	1.004538762	1.000409552
20	0.984341955	0.999481512	0.999997935
50	0.982841834	0.999261951	0.999979578

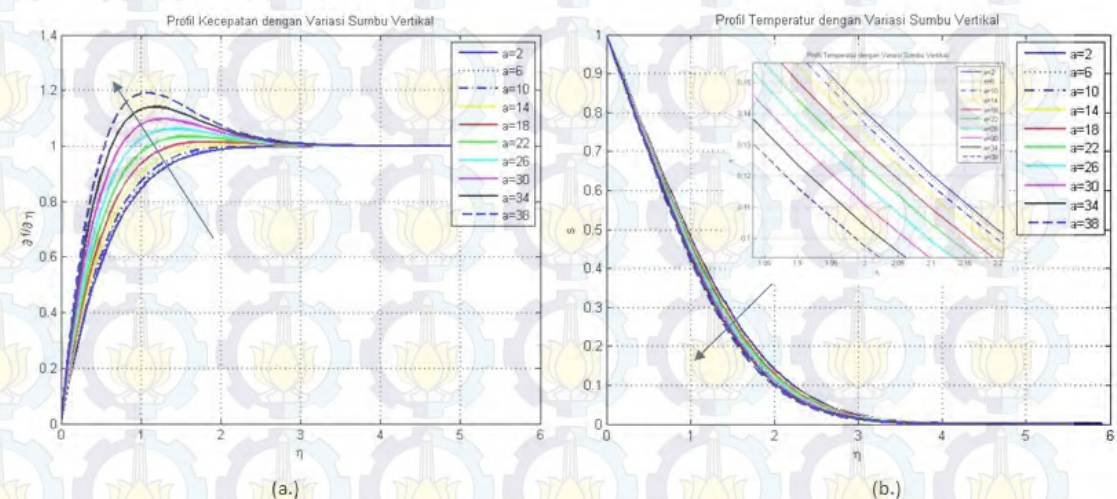
Tabel 6.11: Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)

b	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta = 5$
2	0.014482334	0.001376558	0.000510268
4	0.023246106	0.002297318	0.000553381
20	0.027784542	0.00285343	0.00058353
50	0.027966575	0.002876785	0.000584854

Tabel 6.12: Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Sumbu Horizontal (b)

b	f'	s
2	1.208751643	0.112470211
6	0.861936307	0.155952457
10	0.827399935	0.160697244
14	0.817625721	0.160917995
18	0.813611099	0.160962875
22	0.811561816	0.162896402
26	0.810397819	0.161399799
30	0.809660148	0.161500182
34	0.809140529	0.163233905
38	0.808792198	0.163282486

Hasil 5. Variasi Sumbu Vertikal dengan Beberapa Macam Inputan



Gambar 6.5: (a.) Profil Kecepatan dengan Variasi a dan (b.) Profil Temperatur dengan Variasi a

Tanda panah pada gambar menunjukkan bahwa dengan kecepatan semakin naik dan temperatur menurun dengan bertambahnya nilai a , nilai variasi a yang digunakan yaitu $a = 2, 6, 10, \dots, 38$. Karena pada gambar menunjukkan

bahwa kecepatan meningkat dan temperatur semakin menurun seiring dengan bertambahnya nilai parameter a maka dapat diambil beberapa nilai a yang digunakan pada simulasi pada Bab V.

Tabel 6.13: Nilai Kecepatan Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)

a	$\eta = 2$	$\eta = 3$	$\eta = 4$
2	0.983003238	0.999285636	0.99998156
4	0.984341955	0.999481512	0.999997935
16	1.008908517	1.002890934	1.00027756
40	1.093858523	1.011557935	1.000992592

Tabel 6.14: Nilai Temperatur Fluida terhadap η dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)

a	$\eta = 3$	$\eta = 4$	$\eta = 5$
2	0.027946987	0.002874268	0.000584711
4	0.027784542	0.00285343	0.00058353
16	0.024809255	0.002483098	0.000563151
40	0.014482334	0.001376558	0.000510268

Tabel 6.15: Nilai Kecepatan dan Temperatur Fluida pada saat $\eta = 1$ dengan Variasi Sumbu Vertikal (a)

a	f'	s
2	0.808655842	0.163301505
6	0.81869963	0.161903629
10	0.83846755	0.159169191
14	0.867349361	0.155215073
18	0.904497627	0.15020272
22	0.948896531	0.144322689
26	0.999436197	0.137779866
30	1.054982985	0.130778502
34	1.11443866	0.123510007
38	1.176784227	0.116143766

DAFTAR PUSTAKA

Abel, M. S. and Nandeppanavar, M. M. (2009), "Heat Transfer in MHD Viscoelastic Boundary Layer Flow Over A Stretching Sheet with Non-Uniform Heat Source/Sink", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14(5),2120-2131.

Ahmad, S., Arifin, N. M., Nazar, R. Pop, I.(2008), "Free Convection Boundary Layer Flow Over Cylinders of Elliptic Cross Section with Constant Surface Heat Flux", *European Journal of Scientific Research*, ISSN 1450-216X Vol. 23 No.4: 613-625.

Ali, F. M., Nazar, R., Arifin, N. M. (2010), "Numerical Solutions of Unsteady Boundary Layer Flow Due to an Impulsively Stretching Surface", *Journal of Applied Computer Science and Mathematics*, no. 8(4)

Anwar, I. Amin, N. Prop, I. (2008), "Mixed Convection Boundary Layer Flow of a Viscoelastic Fluid Over a Horizontal Circular Cylinder", *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 814-821.

Arber, T. (2013), "Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)", Lecture handout: University of Warwick, UK.

Bharti, R. P., Sivakumar, P., Chhabra, R. P. (2007), "Forced Convection Heat Transfer From An Elliptical Cylinder to Power-law Fluids", *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51, 1838-1853.

Cheng, C.Y. (2012), "Free Convection Boundary Layer Flow Over a Horizontal Cylinder of Elliptic Cross Section in Porous Media Saturated by a Nanofluid", *International Communications in Heat and Mass Transfer* 39, 1-4:931-936. Artikel ini diperoleh dari: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0735193312001133>.

D'Alessio, S.J.D. (1997), "Steady and Unsteady Forced Convection Past an Inclined Elliptic Cylinder ", *Acta Mechanica*, 123:99-115.

Hussanan, A. Ismail, Z. Khan, I. Hussein, A. Shafie, S. (2014), "Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass

- Diffusion and Newtonian Heating”, The European Physical Journal Plus. 1-16.
- Imron, C. Suhariningsih. Widodo, B. Yuwono, T. (2013), ”Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I-Shape Cylinder in A Tandem Configuration”, Applied Mathematical Sciences, Vol.7. 114: 5657-5666.
- Ingham, D. B., and Merkin, J. H. (1981), ”Unsteady Mixed Convection from An Isothermal Circular Cylinder”, Journal of Acta Mechanica. 38: 55-69.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Layer Flow of Viscouselastic Fluid*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- Kudenatti, R. B. Kirsur, S. R. Achala, L. and Bujurke, N. (2013), ”MHD Boundary Layer Flow Over A Non-Linear Stretching Boundary with Suction and Injection”, International Journal of Non-Linear Mechanics. 50:58-67.
- Leal, L. (1992), *Laminar Flow and Convective Transport Processes: Scaling Principles and Asymptotic Analysis.*, Butterworth-Heinemann.
- Lienhard, J. H. (1992), *A Heat Transfer Textbook*, Courier Dover Publications.
- Mohammad, N. F. (2014), *Unsteady Magnetohydrodynamics Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere In Viscous and Micropolar Fluids*, Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- Nazar, R. (2004), *Mathematical Models for Free and Mixed Convection Boundary Layer Flow of Micropolar Fluids*, , Universiti Technology Malaysia, Malaysia.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan,B.H. (2008), *Schaum's Outline Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- Potter, M.C., Wiggert, D.C., dan Ramadan,B.H. (2012), *Mechanics of Fluids Fourth Edition*, Cengage Learning, USA.
- Sen, M. (1996), *Lecture Notes on Intermediate Fluid Mechanics*, University of Notre Dame.
- Sulistyaningtyas, A. D. (2015), *Pengaruh Aliran Fluida Viskoelastik yang Melewati Silinder Eliptik*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, itsress, Surabaya.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Dwi Ariyani Khalimah, dilahirkan di Dusun Bagus, Desa Terusan, Kabupaten Mojokerto, Provinsi Jawa Timur pada 31 Mei 1991 dan merupakan anak kedua dari tiga bersaudara pasangan Samsul Arifin dan Sri Kayatin. Pendidikan formal ditempuh mulai dari TK Al-Khairiyah pada tahun 1996, dilanjutkan SDN Terusan III, lulus pada tahun 2003 dilanjutkan ke pendidikan SMP Negeri 2 Kota

Mojokerto lulus pada tahun 2006, dan melanjutkan pendidikan ke SMA Negeri 1 Soko Kabupaten Mojokerto, lulus pada tahun 2009. Setelah lulus SMA penulis melanjutkan pendidikan di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, lulus pada tahun 2013 dan melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya pada tahun 2014. Pada jenjang S1 penulis mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi dengan judul Tugas Akhir yaitu: Aplikasi Metode *State Feedback Linearization* pada Sistem Kendali Gerak Kapal, pada jenjang S2 penulis tetap mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi, Komputasi Dinamika Fluida dengan judul Tesis yaitu: Analisa Aliran Tak Tunak Konveksi Paksa Fluida Kental Magnetohidrodinamik (MHD) Melewati Silinder Eliptik. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: ariyanikha@gmail.com.

